LIEDRO

ana di
rmazione Scientifica

- COULSON C. A., *Onde*
- PATTERSON E. M., *Topologia*
- DUQUESNE M., *Materia e Antimateria*
- AITKEN A. C., *Determinanti e matrici*
- BURKILL J. C., *Teoria delle equazioni differenziali ordinarie*
- LEDERMANN W., *Introduzione alla teoria dei gruppi finiti*
- INCE E. L., *Integrazione delle equazioni differenziali ordinarie*
- HYSLOP J. M., *Funzioni di variabile reale*
- SHEPHARD G. C., *Spazi vettoriali di dimensioni finite*
- JEFFREY A., *Magnetoidrodinamica*
- RUTHERFORD D. E., *Fluidodinamica*
- PHILLIPS E. G., *Funzioni di una variabile complessa*
- HYSLOP J. M., *Serie*
- MUSMECI S., *La statica e le strutture*
- RINDLER W., *La Relatività ristretta*
- SPAIN B., *Calcolo tensoriale*

ZIONI CREMONESE
della Croce 77, ROMA

B. SPAIN

CALCOLO TENSORIALE

CREMONESE - ROMA

POLIEDRO

COLLANA DI INFORMAZIONE SCIENTIFICA

diretta da M. ROSATI e G. TEDONE

Questa Collana comprende testi di fisica e di matematica pura ed applicata, italiani, o stranieri in versione italiana. Fra questi ultimi, un gruppo degli *University Mathematical Texts*, editi dalla Oliver e Boyd Ltd., Edinburgh, che così notevole successo hanno ottenuto nei Paesi di lingua inglese.

La Collana è principalmente destinata a ricercatori, tecnici, studenti dei corsi universitari delle Facoltà tecniche e scientifiche.

La scelta dei volumi segue il criterio che ciascuno di essi contenga sistematiche, essenziali esposizioni teoriche, fornisca insieme strumenti per la risoluzione di problemi e, possibilmente, offra spunti per la ricerca. Così la Collana vorrebbe, meditatamente, collocarsi in una posizione intermedia, diremmo in un certo senso intermediaria, rispetto a trattati e ad opere specialistiche più impegnative. Il compito che le si affida è pertanto, da un lato, di offrire allo studioso un'apertura, sui vari argomenti, valida a colmare, sia pure con una informazione di massima, ma rigorosa e precisa, le inevitabili lacune della sua cultura in campi che non siano quelli della sua specifica preparazione; dall'altro, di fornirgli con una pertinente e concreta introduzione, strumenti e idee che gli consentano di affrontare i successivi sviluppi di una determinata teoria sino alle più avanzate frontiere della ricerca. Insomma, soddisfare e suscitare dubbi, curiosità, interessi: questo in definitiva vorrebbe essere il fine che la Collana si propone.

Utili riusciranno i numerosi esempi ed esercizi, dei quali, sempre che possibile, i singoli volumi sono corredati, nonché una nota bibliografica e l'indice analitico che si è avuto cura di predisporre per ciascuno di essi.

BARRY SPAIN

CALCOLO TENSORIALE

(*traduzione dalla III edizione inglese*)

I primi cinque capitoli di questo libro comprendono un quadro sintetico della teoria dei tensori; nei successivi sono illustrate le possibilità di impiego delle tecniche tensoriali alla geometria differenziale, alla elasticità, alla relatività, sia ristretta sia generale.

Completano il volume una esauriente nota bibliografica e una serie di esercizi ed esempi, con le relative soluzioni, che mentre offrono prezioso materiale di addestramento, valgono a illuminare sui principî teorici e ad incuriosire sulle svariate applicazioni del calcolo tensoriale nei suoi varî campi di interesse.

Il libro può essere di notevole utilità a quanti, matematici o fisici o tecnici, abbiano, per motivi di studio o di mestiere, occasione di incontro con i tensori.

Prezzo Lire 1.800

POLIEDRO

Collana di Informazione Scientifica

1. - COULSON C. A., *Onde*
2. - PATTERSON E. M., *Topologia*
3. - DUQUESNE M., *Materia e Antimateria*
4. - AITKEN A. C., *Determinanti e matrici*
5. - BURKILL J. C., *Teoria delle equazioni differenziali ordinarie*
6. - LEDERMANN W., *Introduzione alla teoria dei gruppi finiti*
7. - INCE E. L., *Integrazione delle equazioni differenziali ordinarie*
8. - HYSLOP J. M., *Funzioni di variabile reale*
9. - SHEPHARD G. C., *Spazi vettoriali di dimensioni finite*
10. - JEFFREY A., *Magnetoidrodinamica*
11. - RUTHERFORD D. E., *Fluidodinamica*
12. - PHILLIPS E. G., *Funzioni di una variabile complessa*
13. - HYSLOP J. M., *Serie*
14. - MUSMECI S., *La statica e le strutture*
15. - RINDLER W., *La Relatività ristretta*
16. - SPAIN B., *Calcolo tensoriale*

EDIZIONI CREMONESE
Via della Croce 77, ROMA

B. S...

CAL... TENSO...

CREMON...

POLIEDRO

Collana di
Informazione Scientifica

diretta da
M. Rosati e G. Tedone

Tensor Calculus

BARRY SPAIN BA MSc PhD

UNIVERSITY MATHEMATICAL TEXTS

General Editors
Alan Jeffrey
Iain T. Adamson

OLIVER AND BOYD LTD

16

B. SPAIN

CALCOLO TENSORIALE

CREMONESE - ROMA

Traduzione di Alvaro Palamidessi

S.T.E. - Stabilimento Tipografico Editoriale - Città di Castello - 1971

PREFAZIONE

Scopo di questo libro è di dare un'esposizione sintetica dei risultati fondamentali della teoria dei tensori e di illustrare le possibilità della tecnica tensoriale nelle applicazioni alla geometria differenziale, alla elasticità, alla relatività. Nei primi cinque capitoli sono sviluppati, senza dare eccessivo peso al rigore, i concetti matematici di base. I tre restanti capitoli sono indipendenti l'uno dall'altro, eccezion fatta per i paragrafi 38 e 39 del capitolo VI, che tratta della geometria differenziale euclidea a tre dimensioni, i quali sono necessari per comprendere appropriatamente il capitolo VII, che tratta della teoria dei tensori cartesiani e della elasticità. Infine il capitolo VIII è dedicato alla teoria della relatività, sia ristretta, sia generale. Per il limitato spazio a disposizione è stato impossibile dare una giustificazione ai principî fisici che sono alla base di ambedue queste teorie. Ma per venire in aiuto a quei lettori che non hanno familiarità con la relatività sono stati incorporati nel testo alcuni argomenti esplicativi.

Molto di questo trattato è dovuto agli autori presentati nella bibliografia, specialmente a McConnell, Synge e Schild. In particolare i miei ringraziamenti vanno al Dr. D. E. Rutherford per i suoi numerosi suggerimenti e per le utili osservazioni sia in fase di manoscritto sia in fase di bozze. Infine desidero ringraziare mia moglie per il suo aiuto nella revisione delle bozze.

B. S.

Trinity College, Dublino, Luglio 1952

PREFAZIONE ALLA TERZA EDIZIONE

In questa edizione sono stati corretti vari errori. Inoltre desidero ringraziare Mr. L. Lovitch per una chiara dimostrazione (inserita a pag. 60) *del fatto che il tensore di curvatura è nullo in uno spazio piatto.*

B. S.

CAPITOLO I

ALGEBRA TENSORIALE

1. Introduzione. Il concetto di tensore ha avuto la sua origine negli sviluppi della geometria differenziale da parte di Gauss, Riemann e Christoffel. La nascita del calcolo tensoriale, altrimenti noto col nome di calcolo differenziale assoluto, come un ramo sistematico della matematica è dovuta a Ricci-Curbastro ed al suo allievo Levi-Civita. In collaborazione essi hanno pubblicato la prima memoria su questo soggetto: *Methodes de calcul differential absolu et leurs applications* (Mathematische Annalen, vol. 54, 1901).

La ricerca di relazioni invarianti, quando si passa da un sistema di coordinate ad un altro, è lo scopo principale del calcolo tensoriale. Le leggi della fisica non possono dipendere dalla forma del riferimento che i fisici scelgono per scopi di descrizione. Perciò utilizzare il calcolo tensoriale come mezzo matematico per formulare le leggi della fisica è desiderabile da un punto di vista estetico, e spesso anche molto conveniente. In particolare Einstein lo trovò un mezzo eccellente per la presentazione della sua teoria della relatività generale. Il calcolo tensoriale ne venne in grande evidenza ed ora risulta di grandissimo valore nelle sue applicazioni alla maggior parte dei rami della fisica teorica; è anche indispensabile nella geometria differenziale dell'iperspazio.

Qui si ammette che il lettore abbia una conoscenza elementare dei determinanti e delle matrici, ma dal momento che potrebbe non avere familiarità con il calcolo variazionale, il problema del minimo nella teoria delle geodetiche è trattato fin dai primi principî.

2. Spazio a N dimensioni. Consideriamo un insieme ordinato di N variabili reali $x^1, x^2, \ldots, x^i, \ldots, x^N$; queste variabili possono essere definite le **coordinate** di un punto. (Gli indici $1, 2, \ldots i, \ldots N$, che diremo « soprascritti », servono semplicemente da etichette e non hanno alcun significato di esponenti. In seguito introdurremo delle quantità del tipo a_i e di nuovo l'indice i, che diremo « sottoscritto », funzionerà solo da etichetta.

L'insieme dei punti corrispondenti a n-ple di valori delle coordinate si dicono formare uno **spazio N-dimensionale**, che indicheremo con V_N. Alcune o tutte le coordinate possono essere limitate in modo da assicurare una corrispondenza biunivoca tra punti di V_N ed n-ple di valori delle coordinate stesse.

Una **curva** in V_N è definita come l'insieme dei punti che soddisfano a N equazioni:

$$x^i = x^i(u) \qquad (i = 1, 2, \ldots N),$$

dove u è un parametro e $x^i(u)$ sono N funzioni di u che obbediscono a certe condizioni di continuità. In generale sarà sufficiente che le derivate esistano fino ad un determinato ordine.

Un **sottospazio** V_M di V_N è definito per $M < N$ come l'insieme dei punti che soddisfano le N equazioni

$$x^i = x^i(u^1, u^2, \ldots u^M) \quad (i = 1, 2, \ldots N),$$

in cui compaiono M parametri $u^1, u^2, \ldots u^M$. Le $x^i(u^1, u^2, \ldots u^M)$ sono N funzioni delle $u^1, u^2, \ldots u^M$ che soddisfano a certe condizioni di continuità. Inoltre si suppone che la matrice $M \times N$, formata dalle derivate parziali $\partial x^i / \partial u^j$, sia di rango M. Quando $M = N - 1$, il sottospazio lo si chiama **ipersuperficie.**

3. Trasformazioni di coordinate. Consideriamo uno spazio V_N con il sistema di coordinate $x^1, x^2, \dots x^N$. Le N equazioni

$$\bar{x}^i = \varphi^i(x^1, x^2, \dots x^N) \quad (i = 1, 2, \dots N), \tag{3.1}$$

dove le φ^i sono funzioni ad un sol valore, continue e derivabili, delle coordinate, definiscono un nuovo sistema di coordinate $\bar{x}^1, \bar{x}^2, \dots \bar{x}^N$. Si dice che le equazioni (3.1) definiscono una **trasformazione di coordinate.** È essenziale che le N funzioni φ^i siano indipendenti: una condizione a ciò necessaria e sufficiente è che il determinante jacobiano formato dalle derivate parziali $\partial\bar{x}^i/\partial x^j$ non sia nullo; sotto questa condizione possiamo risolvere le equazioni (3.1) rispetto alle x^i come funzioni delle $\bar{x}^i$ ed ottenere

$$x^i = \psi^i(\bar{x}^1, \bar{x}^2, \dots \bar{x}^N) \qquad (i = 1, 2, \dots N).$$

4. Convenzioni relative agli indici ed alle sommatorie. Introdurremo ora le seguenti due convenzioni:

1) Gli indici latini, usati sia come soprascritti sia come sottoscritti, prenderanno sempre tutti i valori da 1 ad N salvo contrario esplicito avviso.

Le (3.1) si scrivono allora, brevemente, $\bar{x}^i = \varphi^i(x^1, x^2, \dots x^N)$, dato che la convenzione c'informa che ci sono N equazioni.

2) Se in un termine è ripetuto un indice latino, allora si intende che si esegue una sommatoria rispetto a quell'indice nel campo $1, 2, \dots N$. Ne consegue che l'espressione $\sum\limits_{i=1}^{N} a_i x^i$ possiamo scriverla semplicemente $a_i x^i$.

Ora la differenziazione delle (3.1) dà

$$d\bar{x}^i = \sum_{r=1}^{N} \frac{\partial\varphi^i}{\partial x^r}\, dx^r = \sum_{r=1}^{N} \frac{\partial\bar{x}^i}{\partial x^r}\, dx^r \quad (i = 1, 2, \dots N),$$

che, con l'uso delle convenzioni precedenti, si semplifica in

$$d\bar{x}^i = \frac{\partial\bar{x}^i}{\partial x^r}\, dx^r. \tag{4.1}$$

L'indice ripetuto r si dice **saturato,** o **muto,** e può essere sostituito da ogni altro indice latino, eccetto che da i. Cioè le equazioni (4.1) possono essere scritte in modo equivalente $d\bar{x}^i = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^m}\, dx^m$, oppure anche, volendo, $d\bar{x}^l = \frac{\partial \bar{x}^l}{\partial x^i}\, dx^i$. Inoltre, a evitare confusione, lo stesso indice non deve essere usato più di due volte in un termine. Per esempio $(\sum_{i=1}^{N} a_i x^i)^2$ non si scriverà $a_i x^i a_i x^i$, ma piuttosto $a_i a_j x^i x^j$. Sarà sempre chiaro dal contesto se x^2 significa x con 2 soprascritto oppure x al quadrato; ad ogni modo usualmente le potenze saranno indicate con l'uso di parentesi; così $(x^N)^2$ significa il quadrato di x^N. La ragione dell'uso di indici soprascritti o sottoscritti sarà indicata in seguito.

Introduciamo ora la funzione **delta di Kronecker** definita da

$$\begin{cases} \delta_j^k = 1 & \text{se} \quad j = k \\ \delta_j^k = 0 & \text{se} \quad j \neq k. \end{cases} \tag{4.2}$$

Una proprietà ovvia della delta di Kronecker è che $\delta_j^k A^j = A^k$, poiché nella parte sinistra di questa equazione il solo termine che sopravvive è quello per cui $j = k$. Inoltre $\partial x^k / \partial x^j = \delta_j^k$, poiché le coordinate x^i sono indipendenti.

Esercizio. Dimostrare che

$$\delta_j^i \delta_k^j = \delta_k^i; \quad \delta_i^i = N; \quad \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^i} \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j} = \delta_j^k.$$

5. Vettori controvarianti. N funzioni A^i delle N coordinate x^i si dicono costituire le componenti di un **vettore controvariante** se esse si trasformano secondo le equazioni

$$\bar{A}^i = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j} A^j \tag{5.1}$$

per un cambiamento delle coordinate x^i nelle $\bar{x}^i$. Questo significa che le N funzioni possono essere scelte come le componenti di un vettore controvariante nel sistema di coordinate x^i, e le equazioni (5.1) definiscono le N componenti nel nuovo sistema di coordinate $\bar{x}^i$. Moltiplicando le (5.1) per $\partial x^k/\partial \bar{x}^i$ e sommando rispetto all'indice i, da 1 a N, otteniamo

$$\frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^i} \bar{A}^i = \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^i} \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j} A^j = \frac{\partial x^k}{\partial x^j} A^j = \delta^k_j A^j = A^k.$$

Perciò la soluzione delle equazioni (5.1) è

$$A^k = \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^i} \bar{A}^i \tag{5.2}$$

Se esaminiamo le equazioni (4.1) vediamo che i differenziali dx^i formano le componenti di un vettore controvariante, le cui componenti in un altro sistema $\bar{x}_i$ sono i differenziali $d\bar{x}^i$. Segue immediatamente che dx^i/du è un vettore controvariante chiamato **vettore tangente** alla curva $x^i = x^i(u)$.

Consideriamo ora un ulteriore cambio di coordinate $x'^i = g^i(\bar{x}^1, \bar{x}^2, \dots \bar{x}^N)$. Le nuove componenti A'^i sono date da

$$A'^i = \frac{\partial x'^i}{\partial \bar{x}^j} \bar{A}^j = \frac{\partial x'^i}{\partial \bar{x}^j} \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^k} A^k = \frac{\partial x'^i}{\partial x^k} A^k.$$

Questa equazione ha la stessa forma della (5.1), il che dimostra che le trasformazioni di vettori controvarianti formano un gruppo.

Ad eccezione delle coordinate stesse x^i, un simbolo soprascritto indicherà sempre un vettore controvariante, a meno che non sia stato esplicitamente stabilito il contrario. Le coordinate x^i si comportano come le componenti di un vettore controvariante solo rispetto alle trasformazioni lineari del tipo $\bar{x}^i = a^i_j x^j$, dove le a^i_j costituiscono un insieme di N^2 costanti, le quali non necessariamente sono le componenti di un ente del tipo che introdurremo al paragrafo 8 e che chiameremo tensore. In questo caso $a^i_j = \partial \bar{x}^i / \partial x^j$ e la trasformazione può essere riscritta nella forma $\bar{x}^i = \dfrac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j} x^j$. Rispetto ad una generica trasformazione di coordinate, le x^i non formano le componenti di un vettore controvariante. Questo significa, in particolare, che se noi scegliamo $A^i = x^i$, allora le nuove componenti $\bar{A}^i$ rispetto al sistema di coordinate $\bar{x}^i$ non soddisfano le equazioni $\bar{A}^i = \bar{x}^i$.

Esercizio. Se un vettore ha componenti $\dfrac{d^2x}{dt^2}, \dfrac{d^2y}{dt^2}$ in coordinate cartesiane ortogonali, dimostrare che in coordinate polari esse sono

$$\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 ; \quad \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{2}{r}\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} .$$

6. **Vettori covarianti.** Si dice che un insieme di N funzioni A_i delle N coordinate x^i formano le componenti di un **vettore covariante** se si trasformano secondo l'equazione

$$\bar{A}_i = \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^i} A_j \tag{6.1}$$

per un cambiamento delle coordinate x^i in $\bar{x}^i$. Le N funzioni possono essere scelte come le componenti di un vettore covariante nel sistema di coordinate x^i, e le equazioni (6.1) definiscono le N componenti nel nuovo sistema di coordinate $\bar{x}^i$. Moltiplicando le (6.1) per $\partial \bar{x}^i / \partial x^k$ e sommando rispetto all'indice i da 1 a N, otteniamo

$$\frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^k} \bar{A}_i = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^k} \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^i} A_j = \frac{\partial x^j}{\partial x^k} A_j = A_k. \tag{6.2}$$

Poiché $\dfrac{\partial f}{\partial \bar{x}^i} = \dfrac{\partial f}{\partial x^j} \dfrac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^i}$, segue immediatamente da (6.1) che le quantità $\partial f / \partial x^i$ sono le componenti di un vettore covariante, le cui componenti in ogni altro sistema sono le corrispondenti derivate parziali $\partial f/\partial \bar{x}^i$. Un tale vettore covariante si chiama **gradiente** di f.

Un indice sottoscritto denoterà sempre un vettore covariante a meno che non si stabilisca esplicitamente il contrario. In conformità con questa convenzione riguarderemo l'indice i nel vettore covariante $\partial f/\partial x^i$ come un indice sottoscritto.

Mostriamo ora che non c'è distinzione tra vettori covarianti e controvarianti quando ci si limiti a trasformazioni del tipo.

$$\bar{x}^i = a^i_m x^m + b^i, \tag{6.3}$$

dove b^i sono N costanti che non formano necessariamente le componenti di un vettore controvariante e a^i_m sono costanti (non formanti necessariamente un tensore) tali che

$$a^i_r a^i_m = \delta^r_m.$$

Se ora moltiplichiamo le equazioni (6.3) per a^i_r e sommiamo rispetto all'indice i da 1 a N, otteniamo

$$x^r = a^i_r \bar{x}^i - a^i_r b^i.$$

Così:

$$\frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j} = \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^i} = a^i_j,$$

il che dimostra che le equazioni (5.1) e (6.1) definiscono lo stesso tipo di ente.

Esercizio. Provare che le trasformazioni di vettori covarianti formano un gruppo.

7. Invarianti. Una funzione I delle N coordinate x^i è detta un **invariante** o uno **scalare** rispetto alle trasformazioni di coordinate se $I = \bar{I}$, dove $\bar{I}$ è il valore di I nel nuovo sistema di coordinate $\bar{x}^i$.

Per esempio, con le componenti A^i e B_i di un vettore controvariante e, rispettivamente, di un vettore covariante possiamo formare la somma A^iB_i. Quando si passa alle nuove coordinate $\bar{x}^i$, questa somma si trasforma in $\bar{A}^i\bar{B}_i$. Ora

$$\bar{A}^i\bar{B}_i = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j} A^j \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^i} B_k = \delta^k_j A^j B_k = A^k B_k,$$

cioè

$$\bar{A}^i\bar{B}_i = A^iB_i.$$

Così A^iB_i è un invariante.

Un altro invariante è la quantità.

$$\delta^i_i = \delta^1_1 + \delta^2_2 + \ldots\ldots + \delta^N_N = N.$$

8. Tensori del secondo ordine. Formiamo le N^2 quantità $A^{ij} = B^iC^j$, dove B^i e C^j sono le componenti di due vettori controvarianti. Segue da (5.1) che le A^{ij} si trasformano secondo le

$$\bar{A}^{ij} = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^k} \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^l} A^{kl}. \tag{8.1}$$

Più generalmente, se abbiamo N^2 funzioni A^{ij} la cui legge di trasformazione è del tipo (8.1), allora chiamiamo le A^{ij} componenti di un **tensore controvariante** del **secondo ordine.** Questo tensore non necessariamente è il prodotto delle componenti di due vettori controvarianti. Un insieme di N^2 funzioni può sempre essere scelto in modo che le funzioni stesse siano le componenti di un tensore controvariante del secondo ordine, ed allora le (8.1) ne definiscono le componenti in ogni altro sistema di coordinate $\bar{x}^i$.

Analogamente, se abbiamo N^2 funzioni A_{ij} la cui legge di trasformazione è

$$\bar{A}_{ij} = \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^i} \frac{\partial x^l}{\partial \bar{x}^j} A_{kl}, \tag{8.2}$$

chiamiamo le A_{ij} componenti di un **tensore covariante** del **secondo ordine.**

Inoltre, se abbiamo N^2 funzioni A^i_j la cui legge di trasformazione è

$$\bar{A}^i_j = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^k} \frac{\partial x^l}{\partial \bar{x}^j} A^k_l, \tag{8.3}$$

chiamiamo le A^i_j componenti di un **tensore misto** del **secondo ordine.**

Notare che gli indici sono sui tensori come soprascritti quando indicano controvarianza e come sottoscritti quando denotano covarianza. In particolare, il tensore misto A^i_j si trasforma come un vettore controvariante rispetto all'indice i e come un vettore covariante rispetto all'indice j. Conseguentemente i è messo come indice soprascritto mentre j è messo come sottoscritto.

Se, in particolare, scegliamo come A^k_l la δ^k_l di Kronecker, dalla (8.3) abbiamo

$$\bar{A}^i_j = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^k} \frac{\partial x^l}{\partial \bar{x}^j} \delta^k_l = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^k} \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^j} = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial \bar{x}^j} = \delta^i_j :$$

cioè la delta di Kronecker è un tensore misto del secondo ordine le cui componenti in ogni altro sistema formano ancora la delta di Kronecker. Questo giustifica il porre uno degli indici come sottoscritto e l'altro come soprascritto. Viceversa, se scegliamo le N^2 quantità $\delta_{ij} = \delta^i_j$ come le componenti di un tensore covariante in un sistema di coordinate x^i, le componenti in un nuovo sistema $\bar{x}^i$ sono date da $\bar{\delta}_{ij} = \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^i} \cdot \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^j}$, cioè le componenti trasformate $\bar{\delta}_{ij}$ non formano la delta di Kronecker.

Esercizio. Provare che $A_{ij}B^iC^j$ è un invariante se B^i e C^j sono vettori controvarianti e A_{ij} un tensore covariante.

9. Tensori di ordine più elevato. N^{s+p} funzioni $A^{t_1 t_2 \dots t_s}_{q_1 q_2 \dots q_p}$ delle N coordinate x^i si dicono essere le componenti di un **tensore misto** dell'$(s+p)$**-esimo ordine**, controvariante dell's-esimo ordine e covariante del p-esimo ordine, se si trasformano secondo l'equazione

$$\bar{A}^{u_1 u_2 \dots u_s}_{r_1 r_2 \dots r_p} = \frac{\partial \bar{x}^{u_1}}{\partial x^{t_1}} \cdots \frac{\partial \bar{x}^{u_s}}{\partial x^{t_s}} \frac{\partial x^{q_1}}{\partial \bar{x}^{r_1}} \cdots \frac{\partial x^{q_p}}{\partial \bar{x}^{r_p}} A^{t_1 t_2 \dots t_s}_{q_1 q_2 \dots q_p}, \tag{9.1}$$

quando si cambino le coordinate x^i nelle $\bar{x}^i$. Questa formula, sebbene piuttosto robusta in apparenza, è solamente una combinazione della (5.1) applicata agli indici controvarianti e della (6.1) applicata agli indici covarianti.

L'ordine degli indici in un tensore è importante. Il tensore A^{ij} non è necessariamente lo stesso che il tensore A^{ji}. (Nel linguaggio matriciale A^{ji} è la trasposta di A^{ij}). Se due indici controvarianti o due indici covarianti possono essere intercambiati senza alterare il tensore, si dice che questo è **simmetrico** rispetto ai due indici. Proviamo ora che se un tensore è simmetrico rispetto a due indici in un certo sistema di coordinate, rimane simmetrico rispetto a questi due indici in ogni altro sistema di coordinate. Non si perde in generalità provando questo per il tensore controvariante $A^{ij} = A^{ji}$. Applicando la (8.1) abbiamo, per l'appunto:

$$\bar{A}^{ij} = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^k} \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^l} A^{kl} = \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^l} \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^k} A^{lk} = \bar{A}^{ji}, \tag{9.2}$$

Non possiamo definire usualmente una simmetria rispetto a due indici, di cui uno denota la controvarianza e l'altro la covarianza, perché questa simmetria può non essere conservata dopo una trasformazione di coordinate. La delta di Kronecker, comunque, è un tensore misto che possiede la simmetria rispetto ai suoi due indici.

Quando *tutti* gli indici di un tensore, sia controvariante che covariante, possono essere scambiati senza alterare il tensore, questo è dctto, senz'altro, simmetrico. Un tensore simmetrico del secondo ordine ha al massimo $N(N+1)/2$ componenti distinte.

Un tensore, del quale ciascuna componente varia in segno ma non in grandezza quando due indici controvarianti o due indici covarianti sono scambiati, si dice essere **emisimmetrico** rispetto a questi due indici. Si può dimostrare, con equazioni simili alla (9.2), che la proprietà di emisimmetria è anche indipendente dalla scelta del sistema di coordinate. La emisimmetria come la simmetria, non può essere definita rispetto a due indici di cui uno denoti controvarianza e l'altro covarianza.

Se *tutti* gli indici di un tensore controvariante o di un tensore covariante possono essere scambiati così che il tensore cambi di segno ad ogni scambio di una coppia di indici, il tensore è detto senz'altro emisimmetrico. Un tensore emisimmetrico A^{ij} del secondo ordine ha al massimo $N(N-1)/2$ componenti distinte in valore, poiché tutte le quantità A^{ii} (senza somma) sono nulle. In altre parole le varie componenti di un tensore emisimmetrico di ordine N sono o nulle o a coppie differenti solamente in segno; così per un tale tensore c'è, essenzialmente, soltanto una componente che dev'essere non nulla.

La deduzione più importante che si può trarre dalla (9.1) è questa: se tutte le componenti di un tensore in un sistema di coordinate sono nulle in un punto, esse sono tutte nulle in questo punto, in ogni sistema di coordinate. Inoltre se le componenti sono identicamente nulle in un sistema di coordinate, esse sono ancora identicamente nulle in ogni sistema di coordinate. È questa proprietà che costituisce l'importanza dei tensori nelle applicazioni della fisica.

Quando un tensore è definito in tutti i punti di una curva o addirittura in tutto lo spazio V_N, diciamo che esso costituisce un campo tensoriale.

Esercizio 1. Se A_{ij} è un tensore emisimmetrico, provare che

$$(\delta^i_j \delta^k_l + \delta^i_l \delta^k_j) A_{ik} = 0.$$

Esercizio 2. Provare che le trasformazioni di tensori formano un gruppo.

10. Addizione, sottrazione e moltiplicazione di tensori. Chiaramente non possiamo aspettarci di dare un significato tensoriale all'espressione $A^{ij} + B^i$, perché essa non può soddisfare alla legge di trasformazione (9.1). Segue comunque da questa equazione che ogni combinazione lineare di tensori di un certo tipo, i cui coefficienti siano invarianti, è un tensore dello stesso tipo. Per esempio, dai due tensori A^i_{jk} e B^i_{jk}, possiamo formare il tensore $\lambda A^i_{jk} + \mu B^i_{jk}$ che soddisfa la (9.1) purché λ e μ siano invarianti. In particolare $A^i_{jk} + B^i_{jk}$ e $A^i_{jk} - B^i_{jk}$ sono detti rispettivamente **somma** e **differenza** dei due tensori. Come altro esempio possiamo scrivere

$$A_{ij} = \frac{1}{2} (A_{ij} + A_{ji}) + \frac{1}{2} (A_{ij} - A_{ji}).$$

Ora $A_{ij} + A_{ji}$ è simmetrico e $A_{ij} - A_{ji}$ è emisimmetrico. Così ogni tensore covariante del secondo ordine è la somma di un tensore simmetrico e di uno emisimmetrico. Naturalmente questo è vero anche per un tensore controvariante del secondo ordine.

Scegliamo due tensori, uno controvariante di ordine s e covariante di ordine p, l'altro controvariante di ordine t e covariante di ordine q. Segue allora da (9.1) che i prodotti delle componenti formano un tensore misto controvariante di ordine $s + t$ e covariante di ordine $p + q$. Questo tensore è detto **prodotto esterno** dei due tensori. Per esempio $A^{ijl}_{kmnt} = B^{ij}_k \cdot C^l_{mnt}$ è il prodotto esterno dei due tensori B^{ij}_k e C^l_{mnt} ed è un tensore del tipo indicato dai suoi indici.

La divisione, nel senso solito, di un tensore per un altro non è definita.

11. Contrazione. Partiamo da un tensore misto, cioè a dire A^{ij}_{lmn}, e formiamo la somma A^{ij}_{lmj}. Dalla (9.1) abbiamo

$$\bar{A}^{st}_{pqr} = \frac{\partial \bar{x}^s}{\partial x^i} \frac{\partial \bar{x}^t}{\partial x^j} \frac{\partial x^l}{\partial \bar{x}^p} \frac{\partial x^m}{\partial \bar{x}^q} \frac{\partial x^n}{\partial \bar{x}^r} A^{ij}_{lmn} .$$

$$\begin{aligned}
\bar{A}^{sr}_{pqr} &= \frac{\partial \bar{x}^s}{\partial x^i} \frac{\partial \bar{x}^r}{\partial x^j} \frac{\partial x^l}{\partial \bar{x}^p} \frac{\partial x^m}{\partial \bar{x}^q} \frac{\partial x^n}{\partial \bar{x}^r} A^{ij}_{lmn} \\
&= \frac{\partial \bar{x}^s}{\partial x^i} \frac{\partial x^l}{\partial \bar{x}^p} \frac{\partial x^m}{\partial \bar{x}^q} \delta^n_j A^{ij}_{lmn} \\
&= \frac{\partial \bar{x}^s}{\partial x^i} \frac{\partial x^l}{\partial \bar{x}^p} \frac{\partial x^m}{\partial \bar{x}^q} A^{in}_{lmn} .
\end{aligned}$$

Così osserviamo che A^{ij}_{lmj} è un tensore misto controvariante del primo ordine e covariante del secondo ordine. Questo processo, detto **contrazione**, ci permette di ottenere un tensore di ordine $(r - 2)$ da un tensore misto di ordine r. Nell'esempio precedente potremmo contrarre ancora di un grado ed arrivare al vettore covariante A^{ij}_{lij}. Quando si contrae, ogni indice soprascritto può essere indice di somma con ogni sottoscritto. Così, per es., da A^{ij}_{lmn} si possono formare per contrazione i seguenti differenti tensori: A^{ij}_{lmj}, A^{ij}_{ljn}, A^{ij}_{jmn}, A^{ij}_{lmi}, A^{ij}_{lin}, A^{ij}_{imn}, A^{ij}_{lij}, A^{ij}_{lji}, A^{ij}_{imj}, A^{ij}_{jmi}, A^{ij}_{ijn}, A^{ij}_{jin}. Se il tensore A^{ij}_{lmn} possiede delle proprietà di simmetria, ci saranno meno tensori formabili da questo per contrazione. Come altro esempio si può considerare l'invariante A^i_i formato per contrazione dal tensore misto A^i_j, ciò, tra l'altro, giustifica l'aver chiamato invariante un tensore di ordine zero.

Possiamo anche combinare moltiplicazioni e contrazioni per produrre nuovi tensori. Dai tensori A^{ij}_k e B^l_{mnt}, possiamo ottenere tensori come $A^{ij}_k B^k_{mnt}$, $A^{ij}_k B^l_{inj}$, $A^{ij}_k B^k_{mji}$ e molti altri. Questo processo è detto **moltiplicazione interna** di due tensori ed il tensore risultante è detto **prodotto interno** dei due tensori.

Si noti bene che non contraiamo mai due indici dello stesso tipo, dato che la somma che ne risulta non è necessariamente un tensore. È anche chiaro che con le nostre notazioni, la convenzione relativa alla somma si applica generalmente a due indici dei quali uno sia soprascritto e l'altro sottoscritto.

12. Legge del quoziente. Qualche volta è necessario accertare se un insieme di funzioni formano le componenti di un tensore. Il metodo diretto richiederebbe di accertare se esse soddisfano o no ad una trasformazione tensoriale del tipo (9.1), ma ciò in pratica risulta fastidioso e un controllo più semplice può essere fornito dalla cosiddetta legge del quoziente. La **legge del quoziente** stabilisce che N^p funzioni di x^i formano le componenti di un tensore di ordine p, (il cui carattere di covarianza o di controvarianza può essere determinato prontamente), quando si possa accertare che il prodotto interno di queste funzioni con un tensore *arbitrario* è a sua volta un tensore. Sarà sufficiente fare la prova per il seguente caso particolare. L'insieme di N^3 funzioni A^{ijk} formano le componenti di un tensore del tipo indicato dai suoi indici se

$$A^{ijk}B^p_{ij} = C^{pk},$$

purché B^p_{ij} sia un tensore *arbitrario* e C^{pk} un tensore. Le quantità trasformate, riferite a un sistema di coordinate $\bar{x}^i$, soddisfano le equazioni

$$\bar{A}^{ijk}\bar{B}^p_{ij} = \bar{C}^{pk},$$

che, con una applicazione della (9.1), divengono

$$\bar{A}^{ijk}\frac{\partial \bar{x}^p}{\partial x^l}\frac{\partial x^m}{\partial \bar{x}^i}\frac{\partial x^n}{\partial \bar{x}^j}B^l_{mn} = \frac{\partial \bar{x}^p}{\partial x^q}\frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^r}C^{qr} =$$

$$= \frac{\partial \bar{x}^p}{\partial x^q}\frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^r}A^{ijr}B^q_{ij}.$$

Con un cambiamento di indici saturati abbiamo

$$\frac{\partial \bar{x}^p}{\partial x^l}\left[\bar{A}^{ijk}\frac{\partial x^m}{\partial \bar{x}^i}\frac{\partial x^n}{\partial \bar{x}^j}-A^{mnr}\frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^r}\right]B^l_{mn}=0.$$

Moltiplicando questa equazione per $\partial x^s/\partial \bar{x}^p$ e sommando rispetto a p da 1 a N (in seguito parleremo semplicemente di «moltiplicazione interna per $\partial x^s/\partial \bar{x}^p$») otteniamo

$$\left[\bar{A}^{ijk}\frac{\partial x^m}{\partial \bar{x}^i}\frac{\partial x^n}{\partial \bar{x}^j}-A^{mnr}\frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^r}\right]B^s_{mn}=0. \tag{12.1}$$

Poiché B^s_{mn} è un tensore arbitrario, possiamo sceglierlo in modo che solo una delle sue componenti differisca da zero. Ora ciascuna componente di B^s_{mn} può essere scelta a turno come quella che non si annulla. Questo mostra che la espressione in parentesi è identicamente nulla. Cioè

$$\bar{A}^{ijk}\frac{\partial x^m}{\partial \bar{x}^i}\frac{\partial x^n}{\partial \bar{x}^j}=A^{mnr}\frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^r}. \tag{12.2}$$

La moltiplicazione interna di questa equazione per $\dfrac{\partial \bar{x}^s}{\partial x^m}\dfrac{\partial \bar{x}^t}{\partial x^n}$ conduce alla

$$\bar{A}^{stk}=\frac{\partial \bar{x}^s}{\partial x^m}\frac{\partial \bar{x}^t}{\partial x^n}\frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^r}A^{mnr}.$$

Così A^{mnr} è un tensore del terzo ordine, controvariante rispetto a tutti i suoi indici. Nella dimostrazione precedente è importante che il tensore B^l_{mn} sia arbitrario e non possieda alcuna simmetria o emisimmetria. Esaminiamo che cosa accade se B^l_{mn} è simmetrico in m e n. Non è più possibile dedurre la (12.2) dalla (12.1). La deduzione corretta è ora la seguente:

$$\bar{A}^{ijk}\frac{\partial x^m}{\partial \bar{x}^i}\frac{\partial x^n}{\partial \bar{x}^j}+\bar{A}^{ijk}\frac{\partial x^n}{\partial \bar{x}^i}\frac{\partial x^m}{\partial \bar{x}^j}=$$

$$=A^{mnr}\frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^r}+A^{nmr}\frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^r}.$$

Cambiando due indici saturati, questa diviene

$$(\bar{A}^{ijk} + \bar{A}^{jik}) \frac{\partial x^m}{\partial \bar{x}^i} \frac{\partial x^n}{\partial \bar{x}^j} = (A^{mnr} + A^{nmr}) \frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^r} .$$

La moltiplicazione interna per $\dfrac{\partial \bar{x}^s}{\partial x^m} \dfrac{\partial \bar{x}^t}{\partial x^n}$ mostra che $A^{mnr} + A^{nmr}$ è un tensore controvariante del terzo ordine. Se sappiamo inoltre che A^{mnr} è simmetrico in m ed n, segue immediatamente che A^{mnr} è un tensore simmetrico rispetto agli indici m ed n. Osserviamo, quindi, che la legge del quoziente deve essere applicata con attenzione.

Esercizio 1. Se A^i e B^i sono vettori controvarianti arbitrari e $C_{ij}A^iB^j$ è un invariante, dimostrare che C_{ij} è un tensore covariante del secondo ordine.

Esercizio 2. Se A^i è un vettore arbitrario controvariante e $C_{ij}A^iA^j$ è un invariante, dimostrare che $C_{ij} + C_{ji}$ è un tensore covariante del secondo ordine.

13. Tensori simmetrici coniugati del secondo ordine. Consideriamo un tensore simmetrico covariante del secondo ordine A_{ij}, il cui determinante $|A_{ij}| \neq 0$. Indichiamo con B^{ij} l'espressione formata dividendo il cofattore dell'elemento A_{ij} nel determinante $|A_{ij}|$ per il valore dello stesso determinante $|A_{ij}|$. Dimostriamo che le B^{ij} così ottenute sono le componenti di un tensore controvariante del secondo ordine (dando ciò per scontato, B^{ij} è indicato senz'altro come un tensore controvariante). Dalla teoria dei determinanti abbiamo che

$$A_{ij}B^{ik} = \delta_j^k . \tag{13.1}$$

Non possiamo stabilire il carattere tensoriale di B^{ik} applicando la legge del quoziente direttamente a questa equazione, poiché A_{ij} non è arbitrario. Scegliamo un vettore controvariante arbitrario C^i. Allora $D_i = A_{ij}C^j$ è un vettore covariante arbitrario, perché queste N equazioni possono essere risolte univocamente rispetto alle C^i in funzione delle D_i sotto l'ipotesi $|A_{ij}| \neq 0$. Di conseguenza

$$D_i B^{ik} = A_{ij} C^j B^{ik} = \delta_j^k C^j = C^k.$$

Se ora applichiamo la legge del quoziente all'equazione $D_i B^{ik} = C^k$, vediamo che B^{ik} è appunto un tensore controvariante del secondo ordine. Inoltre è chiaro dalla definizione che B^{ij}, come A_{ij}, è simmetrico.

Tenteremo ora di ottenere con lo stesso procedimento un altro tensore da B^{ik}. Indichiamo con E_{ij} il cofattore di B^{ij} nel determinante $|B_{ij}|$ diviso per lo stesso $|B_{ij}|$. Dalla teoria dei determinanti si ha $|A_{ij}| \cdot |B_{ij}| = 1$ e conseguentemente $|B_{ij}| \neq 0$, il che significa che E_{ij} esiste sempre. Inoltre abbiamo

$$E_{ij} B^{ik} = \delta_j^k.$$

La moltiplicazione interna per A_{kl} dà, applicando la (13.1),

$$E_{lj} = A_{jl} = A_{lj}.$$

Così questo procedimento non fa che riportare al tensore covariante originale del secondo ordine. Diciamo che A_{ij} e B^{ij} sono tensori **coniugati** se soddisfano le equazioni (13.1). È importante notare che un tensore del secondo ordine ha un coniugato solo se il suo determinante non è nullo.

Esercizio. Se $A_{ij} = 0$ per $i \neq j$, dimostrare che per il tensore coniugato si ha $B^{ij} = 0$ per $i \neq j$, e $B^{ii} = 1/A_{ii}$ (senza somma).

CAPITOLO II

L'ELEMENTO LINEARE

14. Tensore fondamentale. A questo punto introduciamo il concetto di distanza nel nostro spazio V_N. Se la distanza ds tra punti vicini con coordinate x^i e $x^i + dx^i$ è data dalla forma quadratica differenziale

$$ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j, \tag{14.1}$$

dove le g_{ij} sono funzioni di x^i, soggette solo alla restrizione $g = | g_{ij} | \neq 0$, lo spazio viene definito uno **spazio di Riemann.** In più postuliano che la distanza tra due punti vicini sia indipendente dal sistema di coordinate. Cioè ds è un invariante. Dalla legge del quoziente, segue che $g_{ij} + g_{ji}$ è un tensore covariante del secondo ordine. Possiamo scrivere

$$g_{ij} = \frac{1}{2} (g_{ij} + g_{ji}) + \frac{1}{2} (g_{ij} - g_{ji}).$$

Il contributo di $\frac{1}{2} (g_{ij} - g_{ji}) \, dx^i dx^j$ a ds^2 è zero, perciò non si perde in generalità assumendo che g_{ij} è simmetrico. Così g_{ij} è un tensore simmetrico covariante del secondo ordine detto **tensore fondamentale** dello spazio di Riemann. La forma quadratica $g_{ij} dx^i dx^j$ è detta **metrica**, ed è anche il quadrato dell'**elemento lineare** ds.

L'elemento lineare ds dello spazio tridimensionale euclideo, riferito a un sistema di assi cartesiani ortogonali, è

$$ds^2 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2.$$

Tutte le componenti del tensore fondamentale sono zero eccetto $g_{11} = g_{22} = g_{33} = 1$. È evidente che la metrica di uno spazio euclideo è una quantità definita positiva. Cioè ds^2 è zero quando $dx^1 = dx^2 = dx^3 = 0$ ma può prendere soltanto valori positivi per tutti gli altri valori reali di dx^1, dx^2 e dx^3.

La teoria della relatività ristretta si sviluppa nello spazio quadrimensionale con elemento lineare ds dato da

$$ds^2 = -(dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2 + c^2(dx^4)^2. \qquad (14.2)$$

Questa metrica non è definita positiva, essendo positiva per tutte le curve lungo cui x^1, x^2 e x^3 sono tutte costanti, ma negativa per tutte le curve lungo cui x^4 è costante. Così lungo queste ultime curve la distanza tra due punti vicini non può essere reale. Per far sì che la distanza ds tra due punti vicini sia reale, l'equazione (14.1) deve essere corretta in

$$ds^2 = e g_{ij} dx^i dx^j, \qquad (14.3)$$

dove il fattore e, chiamato **indicatore**, prende il valore $+1$ o -1 così che ds^2 risulti sempre positivo.

Esercizio. Dimostrare che la metrica dello spazio euclideo, riferito alle coordinate polari sferiche $x^1 = r$, $x^2 = \theta$, e $x^3 = \psi$ è data da $ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \operatorname{sen}^2\theta \, d\psi^2$.

15. Lunghezza di una curva. Consideriamo la curva $x^i = x^i(t)$ con parametro t. Dalla (14.3) la lunghezza della curva tra i punti corrispondenti a $t = t_1$ e $t = t_2$ è data dalla

$$s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{e g_{ij} \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt}} \, dt. \qquad (15.1)$$

Se $g_{ij} \dfrac{dx^i}{dt} \dfrac{dx^j}{dt} = 0$ lungo una curva, allora i due punti corrispondenti a t_1 e t_2 sono a distanza zero l'uno dall'altro, sebbene essi non siano coincidenti. Una tale curva è detta **minimale** o **nulla.** La curva data da

$$\begin{cases} x^1 = c \int r \cos\theta \cos\psi \, dt, & x^2 = c \int r \cos\theta \operatorname{sen}\psi \, dt, \\ x^3 = c \int r \operatorname{sen}\theta \, dt, & x^4 = \int r dt, \end{cases} \tag{15.2}$$

dove r, θ e ψ sono funzioni di t, è una curva reale nulla nello V_4, la cui metrica è (14.2). È chiaro che nessuna curva reale nulla si trova in uno spazio di Riemann la cui metrica sia definita positiva.

Una curva consisterà, in generale, di porzioni lungo le quali l'indicatore e è $+1$, di porzioni lungo le quali l'indicatore è -1, e di porzioni nulle. La lunghezza della curva è allora la somma delle lunghezze di queste porzioni, la parte nulla portando contributo nullo al valore della lunghezza.

Eccettuato il caso di curve nulle, come parametro t può essere scelta l'ascissa curvilinea s misurata a partire da un punto fisso della curva. Da (14.3) si ha allora

$$g_{ij} \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^j}{ds} = e \tag{15.3}$$

lungo ogni porzione di una curva che non sia nulla.

16. Grandezza di un vettore. La **grandezza** A del vettore controvariante A^i è definita da

$$(A)^2 = e_{(A)} \, g_{ij} A^i A^j, \tag{16.1}$$

dove $e_{(A)}$ è l'indicatore $+1$ o -1 che rende A reale. La grandezza A è un invariante. In uno spazio euclideo, riferito a coordinate cartesiane ortogonali, la (16.1) si riconduce alla familiare definizione di grandezza di un vettore.

A questo stadio è necessario introdurre il tensore controvariante coniugato di g_{ij}, che può essere convenientemente scritto g^{ij}. Allora l'equazione (13.1) ci dà.

$$g_{ij}g^{ik} = \delta_j^k. \tag{16.2}$$

Possiamo ora definire la grandezza B del vettore covariante B_i con l'equazione

$$(B)^2 = e_{(B)}\, g^{ij}B_iB_j, \tag{16.3}$$

dove $e_{(B)}$ è l'indicatore del vettore B_i, ed è chiaro che B è un invariante.

Un vettore di grandezza unitaria è detto **vettore unitario.** Segue dalla (15.3) che dx^i/ds è un vettore unitario controvariante. Se la grandezza di un vettore è zero, viene detto **vettore nullo.** Il vettore tangente ad una curva nulla è un vettore nullo.

17. Tensori associati. Il prodotto interno del tensore fondamentale g_{ij} per il vettore controvariante A^j è il vettore covariante $g_{ij}A^j$, che è detto essere **associato** di A^j. Definiamo

$$A_i = g_{ij}A^j. \tag{17.1}$$

Similmente definiamo

$$B^i = g^{ij}B_j$$

e diciamo che il vettore B^i è associato al vettore B_j.

La relazione tra un vettore e il suo associato è reciproca; per il vettore associato ad A_i si ha

$$g^{ij}A_j = g^{ij}g_{jk}A^k = \delta^i A^k = A^i.$$

Questo processo di associazione è spesso ricordato come «abbassamento del soprascritto» o come «innalzamento del sottoscritto», rispettivamente.

Abbiamo ancora

$$e_{(A)}g_{ij}A^iA^j = e_{(A)}g_{ij}g^{ik}A_kg^{jl}A_l = e_{(A)}g^{kl}A_kA_l,$$

la quale dimostra che le grandezze dei vettori associati sono eguali.

Il processo d'innalzamento ed abbassamento degli indici può essere eseguito su tensori. Dal tensore $A^{ijk}_{\;\cdot\cdot\cdot\, lm}$ possiamo formare tensori associati come $A_{r\,\cdot\cdot\, lm}^{\cdot\, jk} = g_{ri}A^{ijk}_{\;\cdot\cdot\cdot\, lm}$ oppure $A^{i\,\cdot\, kst}_{\cdot\, r} = g_{jr}g^{ls}g^{mt}A^{ijk}_{\;\cdot\cdot\cdot\, lm}$. La notazione con i puntini (« notazione punto ») è introdotta per indicare che degli indici sono stati innalzati o abbassati. I punti saranno omessi quando non ci sarà possibilità di confusione. Per esempio, scriveremo $A^{ij} = g^{ir}g^{js}A_{rs}$. Notare che sebbene g_{ij} e g^{ij} siano tensori coniugati, i tensori A_{ij} e A^{ij} non sono di regola coniugati.

Esercizio. Dimostrare che $(A)^2 = e_{(A)}A_iA^i$.

18. Angolo tra due vettori, ortogonalità. L'angolo tra due vettori unitari A^i e B^i è definito da

$$\cos\theta = g_{ij}A^iB^j = A_jB^j = g^{jk}A_jB_k = A^kB_k. \quad (18.1)$$

Questa relazione si identifica con la solita formula $\cos\theta = ll' + mm' + nn'$, quando l'angolo θ sia quello compreso tra i vettori unitari (l, m, n) e (l', m', n') in uno spazio euclideo tridimensionale riferito a coordinate cartesiane ortogonali. Dimostreremo ora che le (18.1) definiscono sempre un angolo reale tra due vettori reali se la metrica dello spazio di Riemann è definita positiva. Allora la grandezza del vettore $\lambda A^i + \mu B^i$ è maggiore o uguale a zero per tutti i valori reali di λ e μ. Cioè

$$g_{ij}(\lambda A^i + \mu B^i)(\lambda A^j + \mu B^j) \geqq 0$$

che si riduce a

$$\lambda^2 + 2\lambda\mu\cos\theta + \mu^2 \geqq 0.$$

Cioè

$$(\lambda + \mu\cos\theta)^2 + \mu^2(1 - \cos^2\theta) \geqq 0.$$

Poiché questa equazione è vera per tutti i valori di λ e μ, segue che $1 - \cos^2\theta \geqq 0$. Così $|\cos\theta| \leqq 1$, cioè θ è reale. Se la metrica non è definita positiva, allora l'angolo tra due vettori reali unitari non è necessariamente reale.

Una immediata deduzione da (18.1) è che l'angolo θ tra due vettori A^i e B^i, che non sono necessariamente vettori unitari, è dato da

$$\cos\theta = \frac{g_{ij}A^iB^j}{\sqrt{e_{(A)}e_{(B)}g_{lm}A^lA^mg_{rs}B^rB^s}}. \tag{18.2}$$

Due vettori sono detti **ortogonali** tra loro se l'angolo da essi formato è retto. Dalla (18.2) segue che condizione necessaria e sufficiente per la ortogonalità di due vettori A^i e B^i è che

$$g_{ij}A^iB^j = 0. \tag{18.3}$$

Non definiamo l'angolo tra due vettori se uno od ambedue sono nulli, ma assumeremo la (18.3) come definizione di ortogonalità di due vettori nulli. Segue che un vettore nullo è ortogonale a se stesso.

Esercizio. Provare che (1, 0, 0, 0) e $(\sqrt{2}, 0, 0, \sqrt{3}/c)$ sono vettori unitari in V_4 con la metrica (14.2). Dimostrare anche che l'angolo tra questi vettori non è reale.

19. Direzioni principali. Dal tensore covariante simmetrico A_{ij} possiamo ricavare il determinante

$$|A_{ij} - \lambda g_{ij}| = 0, \tag{19.1}$$

questa equazione è di grado N in λ. Quando passiamo ad un nuovo sistema di coordinate x^i, questa equazione si trasforma in

$$\left| (\bar{A}_{lk} - \lambda \bar{g}_{lk}) \frac{\partial \bar{x}^l}{\partial x^i} \frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^j} \right| = 0.$$

Applicando la legge di moltiplicazione dei determinanti, questa equazione può essere scritta

$$\left| \bar{A}_{lk} - \lambda \bar{g}_{lk} \right| \cdot \left| \frac{\partial \bar{x}^l}{\partial x^i} \right|^2 = 0.$$

Lo Jacobiano $\left| \dfrac{\partial \bar{x}^l}{\partial x^i} \right|$ non si annulla, e conseguentemente questa equazione si riduce a

$$| \bar{A}_{lk} - \lambda \bar{g}_{lk} | = 0.$$

Confrontando con la (19.1) deduciamo che le radici $\lambda_{(K)}$ di questa equazione sono invarianti. (Lettere maiuscole sono usate per contraddistinguere le radici; la loro chiusura tra parentesi mette in evidenza che esse non hanno un significato tensoriale, e la convenzione della somma non è applicabile ad esse).

Ora consideriamo le N equazioni

$$(A_{ij} - \lambda_{(K)} g_{ij}) \, L^i_{(K)} = 0. \tag{19.2}$$

dove $\lambda_{(K)}$ è una radice semplice della (19.1). Queste determinano i rapporti degli N valori di $L^i_{(K)}$ Non possiamo dedurre immediatamente dalla legge del quoziente che $L^i_{(K)}$ è un vettore controvariante, poiché il tensore $A_{ij} - \lambda_{(K)} g_{ij}$, con cui è effettuato il prodotto interno, non è arbitrario. Invece passiamo al sistema di coordinate $\bar{x}^i$ e le equazioni (19.2) si trasformano in

$$(\bar{A}_{lk} - \lambda_{(K)} \bar{g}_{lk}) \frac{\partial \bar{x}^l}{\partial x^i} \frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^j} L^i_{(K)} = 0.$$

Il prodotto interno per $\partial x^j / \partial \bar{x}^m$ dà

$$(\bar{A}_{lm} - \lambda_{(K)} \bar{g}_{lm}) \frac{\partial \bar{x}^l}{\partial x^i} L^i_{(K)} = 0.$$

Queste N equazioni determinano i rapporti delle N quantità $\frac{\partial \bar{x}^l}{\partial x^i} L^i_{(K)}$, che sono le componenti di $L^l_{(K)}$ nel sistema di coordinate $\bar{x}^i$. Cioè $L^i_{(K)}$ si trasforma in accordo con l'equazione (5.1) e così $L^i_{(K)}$ è un vettore controvariante. Scegliamo adesso i rapporti delle $L^i_{(K)}$ in modo che esso sia un vettore unitario. Cioè

$$g_{ij} L^i_{(K)} L^j_{(K)} = e_{(K)}, \tag{19.3}$$

dove $e_{(K)}$ è l'indicatore del vettore $L^i_{(K)}$.

Similmente possiamo dimostrare che in corrispondenza di ciascuna radice semplice $\lambda_{(M)}$ dell'equazione (19.1) esiste il vettore unitario $L^i_{(M)}$ che soddisfa le equazioni

$$(A_{ij} - \lambda_{(M)} g_{ij})\, L^i_{(M)} = 0. \tag{19.4}$$

e

$$g_{ij} L^i_{(M)} L^j_{(M)} = e_{(M)}. \tag{19.5}$$

Quando $\lambda_{(M)}$ è una radice multipla di (19.1), il vettore $L^i_{(M)}$ non è univocamente determinato dalle equazioni (19.4) e (19.5).

Scegliamo due radici semplici $\lambda_{(K)}$ e $\lambda_{(M)}$ di (19.1). Poiché $\lambda_{(K)} \neq \lambda_{(M)}$ i prodotti interni della (19.2) per $L^j_{(M)}$ e di (19.4) per $L^i_{(K)}$ danno, per sottrazione:

$$g_{ij} L^i_{(K)} L^j_{(M)} = 0. \tag{19.6}$$

Questo dimostra che i due vettori unitari $L^i_{(K)}$ e $L^i_{(M)}$ sono ortogonali. Così se tutte le radici dell'equazione (19.1) sono semplici in ogni punto, il tensore covariante simmetrico determina unicamente N vettori unitari mutuamente ortogonali. Le direzioni di questi vettori in un punto sono dette **direzioni principali** determinate da A_{ij}. Se la metrica $g_{ij}dx^i dx^j$ è definita positiva tutte le radici della (19.1) sono reali. Cioè le direzioni principali sono reali in uno spazio con metrica definita positiva.

Consideriamo ora l'invariante λ definito da

$$\lambda = A_{ij}L^i L^j / g_{lm}L^l L^m.$$

I massimi e i minimi finiti di λ sono dati da $\partial\lambda/\partial L^j = 0$, cioè da

$$A_{ij}L^i(g_{lm}L^l L^m) - g_{ij}L^i(A_{lm}L^l L^m) = 0.$$

Questa equazione può essere scritta

$$(A_{ij} - \lambda g_{ij})\, L^i = 0.$$

L'eliminazione della L^i porta all'equazione

$$| A_{ij} - \lambda g_{ij} | = 0.$$

Così i massimi e i minimi finiti di λ sono i valori corrispondenti alle direzioni principali determinate da A_{ij}.

Se $A_{ij} = \lambda g_{ij}$ in un punto, allora le direzioni principali sono indeterminate in quel punto. Se $A_{ij} \equiv \lambda g_{ij}$ in tutti i punti di un V_N, lo spazio è detto **omogeneo** rispetto al tensore A_{ij}.

In uno spazio euclideo a N dimensioni riferito a coordinate cartesiane ortogonali, le componenti del tensore fondamentale g_{ij} formano la matrice unitaria. Quindi le radici di (19.1) sono in questo caso gli autovalori della matrice A_{ij} e le direzioni principali sono quelle dei suoi autovettori.

Esercizio. Dimostrare che $A_{ij}\overset{i}{L}_{(K)}\overset{j}{L}_{(K)} = e_{(K)}\lambda_{(K)}$ e che A_{ij} $\overset{i}{L}_{(K)}\overset{j}{L}_{(M)} = 0$. [Non si esegue la somma sopra (K)].

Esercizi

1. Dimostrare che, essendo θ l'angolo tra i vettori A^i e B^i, si ha

$$\text{sen}^2\theta = \frac{(e_{(A)}e_{(B)}g_{hi}g_{jk} - g_{hk}g_{ij})\, A^h A^i B^j B^k}{e_{(A)}e_{(B)}g_{hi}g_{jk}\, A^h A^i B^j B^k}.$$

2. Se A_{ij} è un tensore emisimmetrico covariante, provare che $(A_{23}/\sqrt{g}, A_{31}/\sqrt{g}, A_{12}/\sqrt{g})$ sono le componenti di un vettore controvariante. Dimostrare anche che $(\sqrt{g}A^{23}, \sqrt{g}A^{31}, \sqrt{g}A^{12}$ sono le componenti di un vettore covariante se A^{ij} è un tensore controvariante emi-simmetrico.

3. Provare che nessuna relazione del tipo

$$\lambda g_{ij}A_{hk} + \mu g_{ih}A_{jk} + \nu g_{ik}A_{hj} = 0$$

può esistere in un V_N, $(N > 1)$, dove λ, μ e ν sono invarianti e A_{hk} è un tensore simmetrico.

Se A_{hk} è un tensore emi-simmetrico, dimostrare che questa equazione non può esistere in un V_N per il quale $N > 2$.

Capitolo III

DERIVAZIONE COVARIANTE

20. Simboli di Christoffel. Sebbene abbiamo trovato, al n. 5, che dx^i/du è sempre un vettore controvariante, l'esercizio alla fine di quel paragrafo potrebbe averci convinto che le sue derivate d^2x^i/du^2 non formino un vettore, le cui componenti in ogni altro sistema siano le corrispondenti derivate seconde. Poi, nel n. 6, abbiamo provato che le derivate parziali di un invariante sono sempre le componenti di un vettore covariante; ancora dimostreremo, nel n. 22, che le derivate di un vettore non formano un tensore le cui componenti in ogni altro sistema siano le corrispondenti derivate del vettore trasformato. Qui il nostro scopo è ora di costruire delle espressioni, contenenti le derivate di un tensore, che siano le componenti di un tensore. Per realizzare questo programma dobbiamo dapprima esaminare due funzioni formate dal tensore fondamentale g_{ij}. Queste sono i simboli di Christoffel di prima e di seconda specie definiti rispettivamente da

$$[ij, k] = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\right) \tag{20.1}$$

e

$$\left\{ \begin{matrix} l \\ ij \end{matrix} \right\} = g^{lk}[ij, k]. \tag{20.2}$$

Sebbene vedremo che i simboli $[ij, k]$ e $\left\{ \begin{matrix} l \\ ij \end{matrix} \right\}$ non sono tensori, questa notazione è stata introdotta conformemente alla convenzione della somma che generalmente si applica a due indici, uno soprascritto ed uno sottoscritto. Così tutti gli indici, salvo uno, dei simboli di Christoffel sono riguardati come sottoscritti. L'eccezione è l nel simbolo di seconda specie, che è trattato come un indice soprascritto.

Le definizioni mostrano che ambedue i simboli sono simmetrici rispetto agli indici i e j. Il prodotto interno di (20.2) per g_{lm} ci dà

$$[ij, m] = g_{lm} \left\{ {l \atop ij} \right\}. \tag{20.3}$$

Segue immediatamente da (20.1) che

$$\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} = [ij, k] + [kj, i]. \tag{20.4}$$

Vogliamo ora esplicitare le derivate di g^{ik} in termini dei simboli di Christoffel. Derivando rispetto ad x^l dalla (16.2) si ottiene

$$\frac{\partial g^{ik}}{\partial x^l} g_{ij} + \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l} g^{ik} = 0.$$

Il prodotto interno per g^{jm} dà

$$\frac{\partial g^{mk}}{\partial x^l} + g^{jm} g^{ik} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l} = 0.$$

Sostituendo in questa espressione da (20.4) e (20.2) si ha infine

$$\frac{\partial g^{mk}}{\partial x^l} = -g^{mi} \left\{ {k \atop il} \right\} - g^{ki} \left\{ {m \atop il} \right\}. \tag{20.5}$$

Dedurremo ora una utile espressione per $\left\{ {i \atop ij} \right\}$. Derivando il determinante $g = | g_{ij} |$ e ricordando che

$g^{lm}g$ è il cofattore di g_{lm} in questo determinante, otteniamo

$$\frac{\partial g}{\partial x^j} = g^{lm}g\,\frac{\partial g_{lm}}{\partial x^j}\,.$$

Dalle (20.1) e (20.2) e dalla simmetria di g_{ij} si ha

$$\left\{ {i \atop ij} \right\} = \frac{1}{2}\,g^{im}\left(\frac{\partial g_{im}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{jm}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^m}\right) = \frac{1}{2}\,g^{im}\,\frac{\partial g_{im}}{\partial x^j}\,.$$

Così

$$\left\{ {i \atop ij} \right\} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{g}\,\frac{\partial g}{\partial x^j} = \frac{\partial}{\partial x^j}\,\{\log \sqrt{g}\}. \tag{20.6}$$

Poiché g non è un invariante, non ne segue che $\left\{ {i \atop ij} \right\}$ sia un vettore covariante. Se g è negativo, in luogo di $\sqrt{g}$, nella (20.6) va scritto $\sqrt{-g}$.

Esercizio 1. Calcolare i simboli di Christoffel corrispondenti alle metriche:

a) $ds^2 = (dx^1)^2 + (x^1)^2(dx^2)^2 + (x^1)^2\,\mathrm{sen}^2 x^2\,(dx^3)^2$.

b) $ds^2 = (dx^1)^2 + G(x^1, x^2)\,(dx^2)^2$, dove G è una funzione di x^1 e di x^2.

Esercizio 2. Se la metrica di un V_N è tale che $g_{ij} = 0$ per $i \neq j$, dimostrare che

$$\left\{ {i \atop jk} \right\} = 0; \qquad \left\{ {i \atop jj} \right\} = -\frac{1}{2g_{ii}}\,\frac{\partial g_{jj}}{\partial x^i}\,;$$

$$\left\{ {i \atop ij} \right\} = \frac{\partial}{\partial x^j}\,\{\log \sqrt{g_{ii}}\}; \qquad \left\{ {i \atop ii} \right\} = \frac{\partial}{\partial x^i}\,\{\log \sqrt{g_{ii}}\}\,,$$

dove i, j, e k non sono eguali, e la convenzione della somma non è applicata.

21. Legge di trasformazione dei simboli di Christoffel. Il tensore fondamentale g_{ij} essendo covariante, si trasforma secondo l'equazione

$$\bar{g}_{lm} = \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^l} \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^m} g_{ij}. \tag{21.1}$$

Derivando rispetto a x^n, si ha

$$\frac{\partial \bar{g}_{lm}}{\partial \bar{x}^n} = \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^l} \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^m} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^n} + \frac{\partial^2 x^i}{\partial \bar{x}^l \partial \bar{x}^n} \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^m} g_{ij} + \\ + \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^l} \frac{\partial^2 x^j}{\partial \bar{x}^m \partial \bar{x}^n} g_{ij}.$$

Sottraiamo questa equazione dalla somma delle due equazioni similari ottenute con una permutazione ciclica degli indici l, m ed n, e dividiamo per due. Allora con appropriati cambiamenti di indici saturati abbiamo

$$\overline{[lm, n]} = [ij, k] \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^l} \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^m} \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^n} + g_{ij} \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^n} \frac{\partial^2 x^j}{\partial \bar{x}^l \partial \bar{x}^m}, \tag{21.2}$$

dove la barra sopra il simbolo di Christoffel indica che questo è stato calcolato nel sistema di coordinate $\bar{x}^i$ e considerando il suo tensore fondamentale $\bar{g}_{ij}$. Ora la legge di trasformazione del tensore fondamentale controvariante è

$$\bar{g}^{np} = g^{rs} \frac{\partial \bar{x}^n}{\partial x^r} \frac{\partial \bar{x}^p}{\partial x^s} \tag{21.3}$$

Moltiplicando internamente ambedue i membri delle (21.2) per i corrispondenti membri della (21.3) e riducendo si ha

$$\overline{\begin{Bmatrix} p \\ lm \end{Bmatrix}} = \begin{Bmatrix} s \\ ij \end{Bmatrix} \frac{\partial \bar{x}^p}{\partial x^s} \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^l} \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^m} + \frac{\partial \bar{x}^p}{\partial x^j} \frac{\partial^2 x^j}{\partial \bar{x}^l \partial \bar{x}^m}. \tag{21.4}$$

Le equazioni (21.2) e (21.4) esprimono le leggi di trasformazione dei simboli di Christoffel, e chiaramente indicano che essi non sono tensori. Comunque nel caso molto speciale di trasformazioni lineari di coordinate si ha $\partial^2 x^j/\partial\bar{x}^l\partial\bar{x}^m = 0$ e i simboli si trasformano allora come tensori. Ora il prodotto interno della (21.4) per $\partial x^r/\partial\bar{x}^p$ dà

$$\frac{\partial^2 x^r}{\partial\bar{x}^l\partial\bar{x}^m} = \overline{\left\{ \begin{matrix} p \\ lm \end{matrix} \right\}} \frac{\partial x^r}{\partial\bar{x}^p} - \left\{ \begin{matrix} r \\ ij \end{matrix} \right\} \frac{\partial x^i}{\partial\bar{x}^l} \frac{\partial x^j}{\partial\bar{x}^m} . \tag{21.5}$$

Questa importante equazione esprime le derivate parziali seconde delle x^r rispetto alle $\bar{x}^s$ in termini delle derivate prime e dei simboli di Christoffel di seconda specie.

Esercizio. Dimostrare che le trasformazioni dei simboli di Christoffel formano gruppo.

22. **Derivazione covariante di vettori.** Cerchiamo ora di stabilire se le derivate parziali di un vettore controvariante hanno o no carattere tensoriale. Derivando rispetto a x^j la relazione

$$A^k = \bar{A}^i \frac{\partial x^k}{\partial\bar{x}^i} \tag{22.1}$$

che dà la legge di trasformazione, si ha:

$$\frac{\partial A^k}{\partial x^j} = \frac{\partial\bar{A}^i}{\partial\bar{x}^n} \frac{\partial\bar{x}^n}{\partial x^j} \frac{\partial x^k}{\partial\bar{x}^i} + \bar{A}^i \frac{\partial^2 x^k}{\partial\bar{x}^i\partial\bar{x}^n} \frac{\partial\bar{x}^n}{\partial x^j}$$

La presenza dell'ultimo termine nella parte a destra di questa equazione dimostra che le derivate parziali $\partial A^k/\partial x^j$ non formano un tensore. Per ottenere un tensore che contenga le derivate parziali eliminiamo le derivate parziali del secondo ordine per mezzo delle (21.5) e questo ci dà

$$\frac{\partial A^k}{\partial x^j} = \frac{\partial\bar{A}^i}{\partial\bar{x}^n} \frac{\partial\bar{x}^n}{\partial x^j} \frac{\partial x^k}{\partial\bar{x}^i} + \bar{A}^i \frac{\partial\bar{x}^n}{\partial x^j} \left[\overline{\left\{ \begin{matrix} p \\ in \end{matrix} \right\}} \frac{\partial x^k}{\partial\bar{x}^p} - \right.$$
$$\left. - \left\{ \begin{matrix} k \\ rs \end{matrix} \right\} \frac{\partial x^r}{\partial\bar{x}^i} \frac{\partial x^s}{\partial\bar{x}^n} \right] .$$

A mezzo delle (22.1) e con appropriati cambiamenti di indici saturati questa equazione si riduce alla

$$\frac{\partial A^k}{\partial x^j} + \left\{ \begin{matrix} k \\ rj \end{matrix} \right\} A^r = \left[\frac{\partial \bar{A}^i}{\partial \bar{x}^n} + \overline{\left\{ \begin{matrix} i \\ rn \end{matrix} \right\}} \bar{A}^r \right] \frac{\partial \bar{x}^n}{\partial x^j} \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^i} .$$

Ponendo (notazione « virgola »):

$$A^k_{,j} \equiv \frac{\partial A^k}{\partial x^j} + \left\{ \begin{matrix} k \\ rj \end{matrix} \right\} A^r, \tag{22.2}$$

l'equazione precedente può essere scritta

$$A^k_{,j} = \bar{A}^i_{,n} \frac{\partial \bar{x}^n}{\partial x^j} \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^i} .$$

Dalle (8.3) si deduce chiaramente che $A^k_{,j}$ è un tensore misto del secondo ordine e questo è definito come il **derivato covariante** di A^k rispetto ad x^j.

Per costruire le corrispondenti entità per i vettori covarianti, anzitutto deriviamo rispetto a $\bar{x}^l$ la legge di trasformazione

$$\bar{A}_i = A_j \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^i} . \tag{22.3}$$

Questo ci dà

$$\frac{\partial \bar{A}_i}{\partial \bar{x}^l} = \frac{\partial A_j}{\partial x^k} \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^l} \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^i} + A_j \frac{\partial^2 x^j}{\partial \bar{x}^i \partial \bar{x}^l} .$$

Di nuovo per mezzo delle (21.5) eliminiamo le derivate parziali del secondo ordine. Inoltre cambiando opportunamente gli indici saturati e sostituendo dalla (22.3), otteniamo

$$\frac{\partial \bar{A}_i}{\partial \bar{x}^l} - \overline{\left\{ \begin{matrix} m \\ il \end{matrix} \right\}} \bar{A}_m = \left[\frac{\partial A_j}{\partial x^n} - \left\{ \begin{matrix} r \\ jn \end{matrix} \right\} A_r \right] \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^i} \frac{\partial x^n}{\partial \bar{x}^l} .$$

Ponendo ora

$$A_{j,n} \equiv \frac{\partial A_j}{\partial x^n} - \left\{ \begin{matrix} r \\ jn \end{matrix} \right\} A_r \tag{22.4}$$

l'equazione precedente può essere scritta

$$\bar{A}_{i,l} = A_{j,n} \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^i} \frac{\partial x^n}{\partial \bar{x}^l},$$

e questa dimostra che $A_{j,n}$ è un tensore covariante del secondo ordine, detto **derivato covariante** di A_j rispetto a x^n.

In uno spazio euclideo ad N dimensioni, riferito a coordinate cartesiane ortogonali, le componenti del tensore fondamentale g_{ij} sono nulle eccetto $g_{11} = g_{22} = \ldots = g_{NN} = 1$. Così tutti i simboli di Christoffel sono nulli e la derivazione covariante si riduce alla consueta derivazione parziale. È bene osservare che i simboli di Christoffel non sono tutti nulli in uno spazio euclideo riferito, per esempio, a coordinate polari sferiche.

Possiamo costruire l'invariante $A^j_{,j}$ per contrazione. Applicando la (20.6) otteniamo

$$A^j_{,j} = \frac{\partial A^j}{\partial x^j} + \left\{ {j \atop rj} \right\} A^r = \frac{\partial A^j}{\partial x^j} + A^r \frac{\partial}{\partial x^r} \{\log \sqrt{g}\},$$

cioè

$$A^j_{,j} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^r} \{\sqrt{g} A^r\}. \tag{22.5}$$

Questo invariante è detto **divergenza** del vettore controvariante A^i ed è spesso indicato con div A^i. La divergenza di un vettore covariante A_i è definita da

$$\operatorname{div} A_i = g^{jk} A_{j,k}. \tag{22.6}$$

Le derivate parziali di un invariante formano le componenti di un vettore covariante. Estendiamo la definizione di derivazione covariante agli invarianti chiamando derivata covariante l'ordinaria derivata parziale. Cioè, per definizione, dall'invariante I formiamo

$$I_{,i} \equiv \frac{\partial I}{\partial x^i}.$$

Poiché $I_{,i}$ è un vettore covariante, dalle (22.4) si ha che la sua derivata covariante rispetto ad x^j è data da

$$(I_{,i})_{,j} = \frac{\partial^2 I}{\partial x^i \partial x^j} - \left\{ {r \atop ij} \right\} \frac{\partial I}{\partial x^r}. \tag{22.7}$$

Così $(I_{,i})_{,j} = (I_{,j})_{,i}$: cioè la derivazione covariante di invarianti, è commutativa. Nel paragrafo 31 vedremo che viceversa la derivazione covariante di vettori, in generale non è commutativa.

Formiamo la divergenza del vettore covariante $I_{,i}$; questo è detto il **laplaciano** di I e scritto $\nabla^2 I$. Cioè

$$\nabla^2 I = g^{jk}(I_{,j})_{,k} = g^{jk}\left(\frac{\partial^2 I}{\partial x^j \partial x^k} - \left\{ {r \atop jk} \right\} \frac{\partial I}{\partial x^r}\right).$$

Esercizio 1. Dimostrare che

$$A_{j,n} - A_{n,j} = \frac{\partial A_j}{\partial x^n} - \frac{\partial A_n}{\partial x^j}.$$

Esercizio 2. Dimostrare che

$$\operatorname{div} A_j = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^r} \{\sqrt{g}\, g^{rk} A_k\} = \operatorname{div} A^j.$$

Esercizio 3. Trovare l'espressione di div A^j e di $\nabla^2 I$: (*a*) in coordinate polari cilindriche, (*b*) in coordinate polari sferiche.

23. Derivazione covariante di tensori. Nell'ultimo paragrafo abbiamo costruito tensori contenenti le derivate parziali di vettori. Si può estendere il processo di derivazione covariante ai tensori? Sia il tensore A_j^i (non si perde di generalità assumendo un indice controvariante ed un indice covariante). Il prodotto interno della sua legge di trasformazione (8.3) per $\partial \bar{x}^m / \partial x^i$ dà:

$$\bar{A}_j^i \frac{\partial x^m}{\partial \bar{x}^i} = A_l^m \frac{\partial x^l}{\partial \bar{x}^j}. \tag{23.1}$$

Deriviamo ora rispetto a $\bar{x}^k$, ed eliminiamo le derivate parziali del secondo ordine per mezzo di (21.5):

$$\frac{\partial \bar{A}^i_j}{\partial \bar{x}^k}\frac{\partial x^m}{\partial \bar{x}^i} + \bar{A}^i_j\left[\begin{Bmatrix} p \\ ik \end{Bmatrix}\frac{\partial x^m}{\partial \bar{x}^p} - \begin{Bmatrix} m \\ rs \end{Bmatrix}\frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^i}\frac{\partial x^s}{\partial \bar{x}^k}\right] =$$

$$= \frac{\partial A^m_l}{\partial x^t}\frac{\partial x^t}{\partial \bar{x}^k}\frac{\partial x^l}{\partial \bar{x}^j} + A^m_l\left[\begin{Bmatrix} p \\ jk \end{Bmatrix}\frac{\partial x^l}{\partial \bar{x}^p} - \begin{Bmatrix} l \\ rs \end{Bmatrix}\frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^j}\frac{\partial x^s}{\partial \bar{x}^k}\right].$$

Applicando la (23.1) e cambiando opportunamente gli indici saturati, questa equazione diventa:

$$\left[\frac{\partial \bar{A}^i_j}{\partial \bar{x}^k} + \bar{A}^n_j\begin{Bmatrix} i \\ nk \end{Bmatrix} - \bar{A}^i_p\begin{Bmatrix} p \\ jk \end{Bmatrix}\right]\frac{\partial x^m}{\partial \bar{x}^i} =$$

$$= \left[\frac{\partial A^m_l}{\partial x^t} + A^r_l\begin{Bmatrix} m \\ rt \end{Bmatrix} - A^m_r\begin{Bmatrix} r \\ lt \end{Bmatrix}\right]\frac{\partial x^t}{\partial \bar{x}^k}\frac{\partial x^l}{\partial \bar{x}^j}.$$

Introducendo la notazione

$$A^m_{l,t} \equiv \frac{\partial A^m_l}{\partial x^t} + \begin{Bmatrix} m \\ rt \end{Bmatrix}A^r_l - \begin{Bmatrix} r \\ lt \end{Bmatrix}A^m_r, \tag{23.2}$$

la suddetta equazione si scrive

$$\bar{A}^i_{j,k}\frac{\partial x^m}{\partial \bar{x}^i} = A^m_{l,t}\frac{\partial x^t}{\partial \bar{x}^k}\frac{\partial x^l}{\partial \bar{x}^j}.$$

Moltiplicando internamente per $\partial \bar{x}^r/\partial x^m$ si ha infine

$$\bar{A}^r_{j,k} = A^m_{l,t}\frac{\partial \bar{x}^r}{\partial x^m}\frac{\partial x^l}{\partial \bar{x}^j}\frac{\partial x^t}{\partial \bar{x}^k}.$$

$A^m_{l,t}$ è dunque un tensore del terzo ordine del tipo indicato dai suoi indici. Questo tensore si chiama **derivato covariante** di A^m_l rispetto a x^t.

Un esame dell'equazione (23.2) dimostra che il derivato covariante di A^m_l contiene tre termini. Essi sono (1) la derivata parziale, (2) il termine con segno positivo simile a quello contenuto nella derivata covariante di un vettore controvariante e (3) un termine con segno negativo simile a quello contenuto nella derivata covariante di un vettore covariante. Questo comporta che l'espressione

$$\begin{aligned} A^{u_1..u_s}_{r_1..r_p,n} \equiv \frac{\partial A^{u_1..u_s}_{r_1..r_p}}{\partial x^n} &+ \sum_{\alpha=1}^{s} \begin{Bmatrix} u_\alpha \\ kn \end{Bmatrix} A^{u_1..u_{\alpha-1}ku_{\alpha+1}..u_s}_{r_1...r_p} \\ &- \sum_{\beta=1}^{p} \begin{Bmatrix} l \\ r_\beta n \end{Bmatrix} A^{u_1..u_s}_{r_1..r_{\beta-1}lr_{\beta+1}..r_p} \end{aligned} \tag{23.3}$$

è un tensore, chiamato **derivato covariante** di $A^{u_1...u_s}_{r_1...r_p}$ rispetto a x^n. La dimostrazione che abbiamo fatto per il tensore misto del secondo ordine si può applicare anche alla (23.3). Ometteremo però i suoi noiosi dettagli e daremo del fatto una diversa dimostrazione nel paragrafo 30.

Riferendoci alle equazioni (20.3), (20.4), (20.5) e (23.3) deduciamo che

$$g_{ij,k} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} - \begin{Bmatrix} l \\ ik \end{Bmatrix} g_{lj} - \begin{Bmatrix} l \\ jk \end{Bmatrix} g_{il} = 0, \tag{23.4}$$

$$g^{ij}_{,k} = \frac{\partial g^{ij}}{\partial x^k} + \begin{Bmatrix} i \\ lk \end{Bmatrix} g^{lj} + \begin{Bmatrix} j \\ lk \end{Bmatrix} g^{il} = 0 \tag{23.5}$$

e

$$\delta^i_{j,k} = \frac{\partial \delta^i_j}{\partial x^k} + \begin{Bmatrix} i \\ lk \end{Bmatrix} \delta^l_j - \begin{Bmatrix} l \\ jk \end{Bmatrix} \delta^i_l = 0. \tag{23.6}$$

Le derivate covarianti dei derivati covarianti sono dunque ancora tensori. Indichiamo queste derivate covarianti del secondo ordine aggiungendo un altro indice senza virgola. Per esempio $A_{i,jk}$ è il derivato covariante di $A_{i,j}$ rispetto a x^k.

Esercizio 1. Se $A_{ij} = B_{i,j} - B_{j,i}$ provare che $A_{ij,k} + A_{jk,i} + A_{ki,j} = 0$.

Esercizio 2. Per mezzo di (23.5) dimostrare che div $A^i =$ $=$ div A_i.

Esercizio 3. Se A^{ijk} è un tensore emisimmetrico, dimostrare che $\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^k} (\sqrt{g}\, A^{ijk})$ è un tensore.

24. Leggi della derivazione covariante. Le derivate covarianti obbediscono alle seguenti leggi:

1) La derivata covariante della somma (o differenza) di due tensori è la somma (o differenza) delle loro derivate covarianti. Questa legge si deduce immediatamente da (23.3).

2) La derivata covariante del prodotto esterno (o interno) di due tensori è uguale alla somma dei due termini ottenuti dal prodotto esterno (o interno) di ciascun tensore per la derivata covariante dell'altro tensore. Per esempio:

$$(A_{ij}B^l)_{,m} = \frac{\partial}{\partial x^m} (A_{ij}B^l) + A_{ij} \begin{Bmatrix} l \\ mk \end{Bmatrix} B^k -$$

$$- B^l \left[\begin{Bmatrix} k \\ im \end{Bmatrix} A_{kj} + \begin{Bmatrix} k \\ jm \end{Bmatrix} A_{ik} \right] = A_{ij,m}B^l + A_{ij}B^l_{,m}.$$

Questo tipo di dimostrazione è abbastanza generale e potrà essere applicato in tutti i casi di prodotto esterno di due tensori. (Un'altra dimostrazione se ne ha nel paragrafo 28). La contrazione di l e j:

$$(A_{ij}B^j)_{,m} = A_{ij,m}B^j + A_{ij}B^j_{,m}$$

chiarisce come la regola si applichi anche al prodotto interno.

3) I tensori g_{ij}, g^{ij} e δ_j^i sono costanti rispetto alla derivazione covariante. Ciò fornisce un'altra via per stabilire le equazioni (23.4), (23.5) e (23.6). Come conseguenza della legge (3) si ha, per esempio:

$$(g^{ij}A_{il})_{,m} = g^{ij}_{,m}A_{il} + g^{ij}A_{il,m} = g^{ij}A_{il,m}$$

Esercizio. Se I e J sono invarianti, dimostrare che

$$\text{div } (JI_{,i}) = J\nabla^2 I + g^{ij}I_{,i}J_{,j}.$$

25. Derivate intrinseche. Si consideri il tensore $A^{u_1 \ldots u_s}_{r_1 \ldots r_p}$ le cui componenti siano funzioni di t lungo la curva $x^i = x^i(t)$. La **derivata intrinseca** è definita da

$$\frac{\delta A^{u_1, \ldots u_s}_{r_1 \ldots r_p}}{\delta t} \equiv A^{u_1 \ldots u_s}_{r_1 \ldots r_p, k} \frac{dx^k}{dt} . \tag{25.1}$$

In conseguenza la derivata intrinseca è un tensore dello *stesso* ordine e tipo del tensore originale.

In corrispondenza dell'invariante I, abbiamo

$$\frac{\delta I}{\delta t} = I_{,k} \frac{dx^k}{dt} = \frac{\partial I}{\partial x^k} \frac{dx^k}{dt} = \frac{dI}{dt} .$$

cioè la derivata intrinseca di un invariante coincide con la sua derivata totale.

Le derivate intrinseche di ordine superiore sono definite facilmente. Per esempio:

$$\frac{\delta^2 A^i_j}{\delta t^2} = \frac{\delta}{\delta t} \left(\frac{\delta A^i_j}{\delta t} \right) = \left(A^i_{j,k} \frac{dx^k}{dt} \right)_{,l} \frac{dx^l}{dt} .$$

In generale la derivazione intrinseca non è commutativa.

Da (22.2), (22.4), (23.4), (23.5) e (23.6) si ottiene:

$$\frac{\delta A^k}{\delta t} \equiv \frac{dA^k}{dt} + \left\{ {k \atop rj} \right\} A^r \frac{dx^j}{dt} , \tag{25.2}$$

$$\frac{\delta A_k}{\delta t} \equiv \frac{dA_k}{dt} - \left\{ {r \atop kj} \right\} A_r \frac{dx^j}{dt} , \tag{25.3}$$

$$\frac{\delta g_{ij}}{\delta t} = \frac{\delta g^{ij}}{\delta t} = \frac{\delta \delta_j^i}{\delta t} = 0. \tag{25..4}$$

Dalla definizione stessa delle derivate intrinseche, consegue che esse obbediscono alle stesse tre leggi valide per le derivate covarianti.

Esercizio. Dimostrare che

$$\frac{\delta}{\delta t} \left(\frac{dx^i}{dt} \right) \equiv \frac{d^2 x^i}{dt^2} + \left\{ {i \atop jk} \right\} \frac{dx^j}{dt} \frac{dx^k}{dt} .$$

Soluzioni dell'es. 1 del n. 20 e dell'es. 3 del n. 22.

Esercizio 1, n. 20 — I soli simboli di Christoffel di seconda specie non nulli sono:

$$a)\quad \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 22 \end{matrix} \right\} = -x^1, \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 33 \end{matrix} \right\} = -x^1 \operatorname{sen}^2 x^2, \left\{ \begin{matrix} 2 \\ 12 \end{matrix} \right\} = 1/x^1,$$

$$\left\{ \begin{matrix} 2 \\ 33 \end{matrix} \right\} = -\operatorname{sen} x^2 \cos x^2, \left\{ \begin{matrix} 3 \\ 13 \end{matrix} \right\} = 1/x^1, \left\{ \begin{matrix} 3 \\ 23 \end{matrix} \right\} = \cot x^2;$$

$$b)\quad \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 22 \end{matrix} \right\} = -\frac{1}{2} \frac{\partial G}{\partial x^1}, \left\{ \begin{matrix} 2 \\ 12 \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2G} \frac{\partial G}{\partial x^1},$$

$$\left\{ \begin{matrix} 2 \\ 22 \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2G} \frac{\partial G}{\partial x^2}.$$

Esercizio 3, n. 22

$$a)\ \operatorname{div} A^i = \frac{\partial A^1}{\partial x^1} + \frac{\partial A^2}{\partial x^2} + \frac{\partial A^3}{\partial x^3} + \frac{1}{x^1} A^1,$$

$$= \frac{\partial A_1}{\partial x^1} + \frac{1}{(x^1)^2} \frac{\partial A_2}{\partial x^2} + \frac{\partial A_3}{\partial x_3} + \frac{1}{x^1} A_1;$$

$$\nabla^2 I = \frac{\partial^2 I}{(\partial x_1)^2} + \frac{1}{(x^1)^2} \frac{\partial^2 I}{(\partial x^2)^2} + \frac{\partial^2 I}{(\partial x^3)^2} + \frac{1}{x^1} \frac{\partial I}{\partial x^1}$$

$$b)\ \operatorname{div} A^i = \frac{\partial A^1}{\partial x^1} + \frac{\partial A^2}{\partial x^2} + \frac{\partial A^3}{\partial x^3} + \frac{2}{x^1} A^1 + \cot x^2 A^2,$$

$$= \frac{\partial A_1}{\partial x^1} + \frac{1}{(x^1)^2} \frac{\partial A_2}{\partial x^2} + \frac{1}{(x^1)^2 \operatorname{sen}^2 x^2} \frac{\partial A_3}{\partial x^3} +$$

$$+ \frac{2}{x^1} A_1 + \frac{\cot x^2}{(x^1)^2} A_2;$$

$$\nabla^2 I = \frac{\partial^2 I}{(\partial x^1)^2} + \frac{1}{(x^1)^2} \frac{\partial^2 I}{(\partial x^2)^2} + \frac{1}{(x^1)^2 \operatorname{sen}^2 x^2} \frac{\partial^2 I}{(\partial x^3)^2} +$$

$$+ \frac{2}{x^1} \frac{\partial I}{\partial x^1} + \frac{\cot x^2}{(x^1)^2} \frac{\partial I}{\partial x^2}.$$

Capitolo IV

GEODETICHE - PARALLELISMO

26. Geodetiche. In uno spazio tridimensionale euclideo, una retta è il cammino più breve tra due punti: è qui nostro obiettivo generalizzare questo concetto fondamentale agli spazi di Riemman.

Sia C la curva di equazioni parametriche $x^i = x^i(t)$, che unisce due punti fissi P_0 e P_1, corrispondenti, rispettivamente, ai valori t_0 e t_1 del parametro t. La distanza s lungo la curva tra P_0 e P_1 è data da

$$s = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{e g_{ij} \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt}}\, dt \tag{26.1}$$

Si considerino tutte le curve passanti per i due punti fissi P_0 e P_1. Fra queste, quella per cui la distanza P_0P_1 misurata lungo la curva risulta stazionaria, son dette **geodetiche.** Potremmo ottenere le equazioni differenziali delle geodetiche applicando le equazioni di Eulero alla (26.1) — un risultato ben noto nel calcolo delle variazioni — ma troviamo più istruttivo richiamarci ai principî fondamentali.

Scegliamo un piccolo vettore *arbitrario* δx^i che varî lungo C con continuità. Allora le equazioni $\bar{x}^i = x^i + \delta x^i$ definiscono una curva $\bar{C}$ vicina a C. Inoltre si pongano le condizioni $\delta x^i = 0$ in P_0 e P_1, il che significa che la curva

$\bar{C}$ unisce sempre P_0 e P_1. La distanza $\bar{s}$ tra P_0 e P_1 lungo $\bar{C}$ è data da:

$$\bar{s} = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{e g_{ij}(\bar{x}) \frac{d\bar{x}^i}{dt} \frac{d\bar{x}^j}{dt}}\, dt,$$

dove $g_{ij}(\bar{x})$ sono ora funzioni di $\bar{x}^i$. Abbiamo, trascurando i termini di ordine superiore al primo:

$$g_{ij}(\bar{x}) \frac{d\bar{x}^i}{dt} \frac{d\bar{x}^j}{dt} =$$

$$= \left(g_{ij} + \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \delta x^k\right)\left(\frac{dx^i}{dt} + \frac{d(\delta x^i)}{dt}\right)\left(\frac{dx^j}{dt} + \frac{d(\delta x^j)}{dt}\right)$$

$$= g_{ij} \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt} + 2 g_{ij} \frac{dx^i}{dt} \frac{d(\delta x^j)}{dt} + \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \delta x^k \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt}.$$

Così:

$$\sqrt{e g_{ij}(\bar{x}) \frac{d\bar{x}^i}{dt} \frac{d\bar{x}^j}{dt}} =$$

$$\sqrt{e g_{ij} \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt}} \left[1 + \frac{g_{ij} \frac{dx^i}{dt} \frac{d(\delta x^j)}{dt} + \frac{1}{2} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \delta x^k \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt}}{g_{ij} \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt}} \right].$$

e di conseguenza la variazione della lunghezza δs nel passare dalla curva C alla curva $\bar{C}$ è data da

$$\delta s = \bar{s} - s = \int_{t_0}^{t_1} \frac{g_{ij} \frac{dx^i}{dt} \frac{d(\delta x^j)}{dt} + \frac{1}{2} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \delta x^k \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt}}{\sqrt{e g_{ij} \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt}}}\, dt.$$

Se, ora, come parametro scegliamo l'ascissa curvilinea s lungo C la precedente equazione si semplifica nella

$$\delta s = \int_{s_0}^{s_1} \left[g_{ij} \frac{dx^i}{ds} \frac{d(\delta x^j)}{ds} + \frac{1}{2} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \delta x^k \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^j}{ds} \right] ds,$$

dove s_0 e s_1 sono i valori corrispondenti rispettivamente ai punti P_0 e P_1. L'integrazione per parti ci dà

$$\delta s = \left[g_{ij} \frac{dx^i}{ds} \delta x^j \right]_{s_0}^{s_1} - \int_{s_0}^{s_1} \delta x^j \left[\frac{d}{ds}\left(g_{ij} \frac{dx^i}{ds} \right) - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^k}{ds} \right] ds.$$

La parte integrata si annulla poiché δx^j è zero in P_0 e P_1. Abbiamo anche:

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}\left(g_{ij} \frac{dx^i}{ds} \right) &= g_{ij} \frac{d^2x^i}{ds^2} + \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^k}{ds} \\ &= g_{ij} \frac{d^2x^i}{ds^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^k}{ds} + \frac{1}{2} \frac{\partial g_{kj}}{\partial x^i} \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^k}{ds}. \end{aligned}$$

Ne consegue che

$$\delta s = - \int_{s_0}^{s_1} \delta x^j \left[g_{ij} \frac{d^2x^i}{ds^2} + [ik, j] \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^k}{ds} \right] ds. \quad (26.2)$$

Le variazioni δx^j sono arbitrarie, così condizioni necessarie e sufficienti perché la curva C sia una geodetica sono:

$$g_{ij} \frac{d^2x^i}{ds^2} + [ik, j] \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^k}{ds} = 0. \quad (26.3)$$

Il prodotto interno per g^{il} fornisce la forma controvariante

$$\frac{\delta}{\delta s}\left(\frac{dx^l}{ds} \right) \equiv \frac{d^2x^l}{ds^2} + \left\{ {l \atop ik} \right\} \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^k}{ds} = 0. \quad (26.4)$$

Le (26.3) o (26.4) rappresentano le equazioni differenziali della geodetica. Si tratta di N equazioni differenziali del secondo ordine. Ora, la teoria delle equazioni differenziali stabilisce che una soluzione $x^i = x^i(s)$ di tali equazioni è univocamente determinata non appena siano assegnati i valori « iniziali » delle x^i e delle $\frac{dx^i}{ds}$, cioè non appena sia fissato un punto dello spazio V_N e una direzione per esso. Geometricamente ciò significa che esiste un'unica geodetica uscente con una assegnata direzione da ogni punto dello spazio. Abbiamo definito la geodetica in termini di curva passante per due punti, ma questa geodetica può non essere unica, a meno che i due punti siano sufficientemente vicini uno all'altro. Il problema dell'unicità implica proprietà topologiche dello spazio V_N. Per esempio, c'è un'unica geodetica che passa per due punti giacenti su una sfera, salvo che i due punti si trovino alle estremità di un diametro. In quest'ultimo caso tutti i cerchi massimi passanti per i due punti sono delle geodetiche.

Per lo spazio euclideo, riferito a coordinate cartesiane ortogonali, i simboli di Christoffel sono nulli. Quindi le geodetiche sono date da $\frac{d^2x^l}{ds^2} = 0$, la cui soluzione è $x^l = A^l s + B^l$, dove A^l e B^l sono vettori costanti: cioè, le geodetiche sono rette.

27. Geodetiche nulle. Le equazioni (15.3) stabiliscono che

$$g_{ij} \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^j}{ds} = e \qquad (27.1)$$

lungo una qualsiasi porzione di una curva che non sia nulla. Derivando otteniamo

$$\frac{d}{ds}\left(g_{ij} \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^j}{ds}\right) = \frac{\delta}{\delta s}\left(g_{ij} \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^j}{ds}\right) = 2g_{ij} \frac{dx^i}{ds} \frac{\delta}{\delta s}\left(\frac{dx^j}{ds}\right).$$

Dalla (26.4) consegue che l'invariante $\frac{d}{ds}\left(g_{ij}\frac{dx^i}{ds}\frac{dx^j}{ds}\right)$ è zero in tutti i punti di una geodetica. Pertanto l'indicatore e non può mutare improvvisamente lungo una geodetica, e così, se il versore tangente non è nullo in un punto, non può essere nullo in alcun altro punto della geodetica. D'altro canto se la direzione iniziale è nulla, la curva è nulla ed è ovviamente impossibile introdurre la lunghezza dell'arco quale parametro. Diremo che una curva nulla $x^i = x^i(t)$ che sia soluzione delle equazioni

$$\frac{d^2x^l}{dt^2} + \left\{ {l \atop ik} \right\} \frac{dx^i}{dt}\frac{dx^k}{dt} = 0 \tag{27.2}$$

è una **geodetica nulla.**

Le geodetiche nulle nel V_4 caratterizzato dall'elemento lineare (14.2), soddisfano le equazioni $\frac{d^2x^l}{dt^2} = 0$. Perciò le curve nulle date da (15.2) non soddisfano queste equazioni, a meno che r, θ e ψ siano costanti. Ne consegue che una curva nulla non è necessariamente una geodetica nulla.

28. Coordinate geodetiche. Dimostreremo ora che è sempre possibile scegliere il sistema di coordinate in modo che tutti i simboli di Christoffel siano zero in un punto determinato. Si consideri un sistema generale di coordinate x^i, i cui valori nel punto particolare P_0 siano $x^i_{(0)}$ e si introduca un nuovo sistema di coordinate $\bar{x}^i$ mediante le equazioni

$$\bar{x}^i = x^i - x^i_{(0)} + \frac{1}{2}\left\{ {i \atop mn} \right\}_{(0)} (x^m - x^m_{(0)})\,(x^n - x^n_{(0)}), \tag{28.1}$$

L'indice (0) apposto ad una qualsiasi entità indica il suo valore nel punto P_0. Le parentesi servono a sottolineare che questo indice non ha significato tensoriale e che la convenzione della somma non si applica ad esso. La derivazione rispetto a x^j dà

$$\frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j} = \delta^i_j + \left\{ {i \atop jn} \right\}_{(0)} (x^n - x^n_{(0)}). \qquad (28.2)$$

Quindi $(\partial \bar{x}^i / \partial x^j)_{(0)} = \delta^i_j$. Conseguentemente il determinante jacobiano $| (\partial \bar{x}^i / \partial x^j)_{(0)} |$ non è zero, il che dimostra che la trasformazione (28.1) è valida nell'intorno di P_0. Facendo il prodotto interno della (28.2) per $\partial x^j / \partial \bar{x}^k$, si ha

$$\delta^i_k = \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^k} + \left\{ {i \atop jn} \right\}_{(0)} (x^n - x^n_{(0)}) \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^k}.$$

Deriviamo questa rispetto a $\bar{x}^h$ ed otteniamo

$$0 = \frac{\partial^2 x^i}{\partial \bar{x}^k \partial \bar{x}^h} + \left\{ {i \atop jn} \right\}_{(0)} \frac{\partial x^n}{\partial \bar{x}^h} \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^k} + \left\{ {i \atop jn} \right\}_{(0)} (x^n - x^n_{(0)}) \frac{\partial^2 x^j}{\partial \bar{x}^k \partial \bar{x}^h}.$$

Così in P_0

$$\left(\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^k} \right)_{(0)} = \delta^i_k ; \left(\frac{\partial^2 x^i}{\partial \bar{x}^k \partial \bar{x}^h} \right)_{(0)} = - \left\{ {i \atop jn} \right\}_{(0)} \delta^n_h \delta^j_k = - \left\{ {i \atop kh} \right\}_{(0)}.$$

Sostituiamo ora in (21.4) e abbiamo

$$\overline{\left\{ {p \atop lm} \right\}}_{(0)} = \left\{ {s \atop ij} \right\}_{(0)} \delta^p_s \delta^i_l \delta^j_m - \delta^p_j \left\{ {j \atop lm} \right\}_{(0)},$$

cioè,

$$\overline{\left\{ {p \atop lm} \right\}}_{(0)} = 0.$$

Quindi un sistema particolare di coordinate, chiamate **coordinate geodetiche**, può essere sempre scelto in maniera che i simboli di Christoffel siano zero in un punto assegnato, che si chiama **polo.** La trasformazione (28.1) non è la sola maniera di ottenere coordinate geodetiche.

Abbiamo tuttavia dimostrato che un tale sistema esiste e che in questo particolare sistema $\bar{x}^i_{(0)} = 0$, il che significa che il polo è anche l'origine delle coordinate. Importante proprietà posseduta da un sistema di coordinate geodetiche è la seguente: le derivate covarianti si riducono alle corrispondenti derivate parziali nel polo, poiché in questo punto tutti i simboli di Christoffel sono nulli. In precedenza nel paragrafo 9 abbiamo accennato che se un tensore è zero in un sistema di coordinate, esso è zero in qualsiasi sistema di coordinate, dal momento che la legge della trasformazione dei tensori è lineare. La verifica di un'equazione tensoriale spesso comporta pesanti manipolazioni algebriche. Generalmente il volume del lavoro si riduce provando dapprima l'equazione nel polo di un sistema di coordinate geodetiche. Ne consegue che l'equazione è vera per tutti i sistemi di coordinate in questo punto. Che se poi questo punto è generico, l'equazione è verificata in tutti i punti di V_N.

Illustreremo questo metodo provando che la legge del prodotto del n. 24 è soddisfatta dalle derivate covarianti. Si consideri il tensore

$$(A_{ij}B^j)_{,m} - A_{ij,m}B^j - A_{ij}B^j_{,m} .$$

Scegliamo un sistema di coordinate geodetiche con polo in un punto P_0, dove le derivate covarianti si riducono alle ordinarie derivate parziali. Dal momento che le derivate parziali soddisfano la legge del prodotto

$$\frac{\partial}{\partial u}(\varphi\psi) = \frac{\partial\varphi}{\partial u}\psi + \varphi\frac{\partial\psi}{\partial u},$$

il suddetto tensore è zero in P_0 nel sistema delle coordinate geodetiche. Così esso è zero in P_0 in ogni sistema di coordinate. Ma P_0 è un punto generico, di conseguenza il suddetto tensore è zero in tutti i punti di V_N. Questo stabilisce la validità della legge del prodotto.

Esercizio. Dimostrare che nel polo P_0 di un sistema di coordinate geodetiche

$$A_{i,jk} = \frac{\partial^2 A_i}{\partial x^j \partial x^k} - A_l \frac{\partial}{\partial x^k} \left\{ \begin{matrix} l \\ ij \end{matrix} \right\}.$$

29. Parallelismo. Un'importante proprietà del parallelismo nello spazio euclideo, che sia riferito a coordinate cartesiane ortogonali, è la seguente: si ottiene un campo parallelo di vettori A_i nello spazio euclideo se le componenti A_i sono costanti. Possiamo esprimere questo fatto analiticamente sia nella forma $\frac{dA_i}{dt} = 0$, sia nell'altra $\frac{\partial A_i}{\partial x^j} = 0$. Dal momento che i simboli di Christoffel sono zero, in termini equivalenti possiamo scrivere queste equazioni nelle forme tensoriali $\frac{\delta A_i}{\delta t} = 0$ oppure $A_{i,j} = 0$, rispettivamente. Ciò suggerisce due vie per generalizzare il concetto di parallelismo ad uno spazio di Riemann. Senonché, come vedremo al n. 31, le equazioni differenziali alle derivate parziali $A_{i,j} = 0$, in generale non sussistono Così la seconda via suggerita non si dimostra vantaggiosa. La derivata intrinseca $\frac{\delta A_i}{\delta t}$, poi, è definita solamente lungo una curva, per cui, usando il primo suggerimento, possiamo solamente definire il parallelismo lungo una curva.

Formalmente, i vettori A_i costituiscono un campo di **vettori paralleli** lungo la curva $x^i = x^i(t)$, se A^i è una soluzione delle equazioni differenziali

$$\frac{\delta A_i}{\delta t} \equiv \frac{dA_i}{dt} - \left\{ \begin{matrix} l \\ ik \end{matrix} \right\} A_l \frac{dx^k}{dt} = 0. \tag{29.1}$$

Queste equazioni formano un insieme di N equazioni differenziali del primo ordine e conseguentemente se il vettore A_i è dato in un qualsiasi punto della curva, esso è univocamente determinato in tutti gli altri punti della curva.

Possiamo anche dire che un campo di vettori paralleli si ottiene da un dato vettore mediante propagazione parallela lungo la curva. Dal momento che

$$\frac{\delta A^i}{\delta t} = \frac{\delta}{\delta t}(g^{ij}A_j) = g^{ij}\frac{\delta A_j}{\delta t}$$

possiamo scrivere le condizioni del parallelismo lungo una curva in forma controvariante

$$\frac{\delta A^i}{\delta t} \equiv \frac{dA^i}{dt} + \left\{ {i \atop jk} \right\} A^j \frac{dx^k}{dt} = 0. \tag{29.2}$$

Vediamo dalle equazioni (26.4) che i vettori unitarî tangenti formano un campo di vettori paralleli lungo una geodetica.

La grandezza A del vettore A_i è definita dalla relazione $(A)^2 = e_{(A)}g_{ij}A^iA^j$. Per derivazione si ha

$$2A\frac{dA}{dt} = \frac{d}{dt}(e_{(A)}g_{ij}A^iA^j) = \frac{\delta}{\delta t}(e_{(A)}g_{ij}A^iA^j) =$$
$$= 2e_{(A)}g_{ij}\frac{\delta A^i}{\delta t}A^j.$$

Quest'equazione si riduce a $A(dA/dt) = 0$ se le A^i costituiscono un campo di vettori paralleli. Se ne deduce che la grandezza di tutti i vettori di un campo di vettori paralleli è costante.

L'angolo θ tra i due vettori A^i e B^i è definito dalla relazione $AB\cos\theta = g_{ij}A^iB^j$. Di qui per derivazione si ha

$$AB\frac{d}{dt}(\cos\theta) + \left(\frac{dA}{dt}B + A\frac{dB}{dt}\right)\cos\theta =$$
$$= g_{ij}\left(\frac{\delta A^i}{\delta t}B^j + A^i\frac{\delta B^j}{\delta t}\right).$$

Se tanto A^i quanto B^i costituiscono campi di vettori paralleli, questa equazione si riduce a $d(\cos\theta)/dt = 0$, purché nessuno dei vettori A^i e B^i sia zero. Cioè, l'angolo tra due vettori non nulli resta costante fin che ambedue subiscono una propagazione parallela lungo la stessa curva.

Il vettore ottenuto in Q mediante la propagazione parallela da P dipende dalla curva che unisce P a Q. Quindi la propagazione parallela intorno a una curva chiusa non riconduce necessariamente al vettore iniziale.

Così, ad esempio, si consideri il V_2 formato dalla superficie di una sfera unitaria. Scegliendo le coordinate polari sferiche $x^1 = \theta$, $x^2 = \psi$, la metrica di V_2 è data da $ds^2 = d\theta^2 + \text{sen}^2\,\theta d\psi$ e un breve calcolo dimostra che i soli simboli di Christoffel di seconda specie che non spariscono sono $\left\{ {1 \atop 22} \right\} = -\,\text{sen}\,\theta\cos\theta$ e $\left\{ {2 \atop 12} \right\} = \cot\theta$. Consideriamo la propagazione parallela del vettore A^i lungo il cerchio minore $\theta = \alpha$. Lungo questo cerchio $d\theta/dt = 0$ ed in conseguenza le equazioni (29.2) si riducono a

$$\frac{dA^1}{d\psi} - \cos\alpha\,\text{sen}\,\alpha A^2 = 0, \quad \frac{dA^2}{d\psi} + \cot\alpha\, A^1 = 0,$$

la cui soluzione può essere prontamente ottenuta nella forma

$$A^1 = \text{sen}\,\alpha\,[c\,\text{sen}\,(\psi\cos\alpha) + d\cos(\psi\cos\alpha)],$$

$$A^2 = c\cos(\psi\cos\alpha) - d\,\text{sen}\,(\psi\cos\alpha),$$

dove c e d sono costanti. Supponiamo di scegliere il vettore A^i tale che sia (1,0) nel punto definito da $\psi = 0$. Allora per sostituzione abbiamo $c = 0$ $d = \text{cosec}\,\alpha$. Perciò il vettore A^i è univocamente determinato dalle componenti $(\cos[\psi\cos\alpha], -\,\text{sen}\,[\psi\cos\alpha]\,/\,\text{sen}\,\alpha)$. La propagazione parallela intorno al cerchio minore considerato porta così al vettore $(\cos[2\pi\cos\alpha], -\,\text{sen}\,[2\pi\cos\alpha]/\text{sen}\,\alpha)$, il quale differisce dal vettore originario (1,0). Il caso del cerchio massimo $\alpha = \pi/2$ è eccezionale, poiché la propagazione parallela lungo di esso riconduce al vettore originario.

Esercizio. Nel V_2 con metrica $ds^2 = du^2 + 2\lambda du dv + dv^2$, dove λ è una funzione di u e v, dimostrare che i vettori tangenti alle curve $u =$ costante formano un campo di vettori paralleli lungo le curve $v =$ costante.

30. Derivata covariante. Per mezzo del concetto di parallelismo possiamo ora dimostrare che il secondo membro della (23.3) costituisce un tensore. Si consideri la curva C determinata dalle equazioni $x^i = x^i(t)$. Si scelgano p campi di vettori controvarianti *arbitrari* $X^i_{(1)}, X^i_{(2)} \dots X^i_{(p)}$ ciascuno parallelo lungo la curva C e s campi di vettori covarianti *arbitrari* $Y_{(1)i}, Y_{(2)i}, \dots Y_{(s)i}$ anch'essi paralleli lungo la curva C.

Si ha allora

$$\frac{dX^i_{(\beta)}}{dt} + \left\{ \begin{matrix} i \\ jk \end{matrix} \right\} X^j_{(\beta)} \frac{dx^k}{dt} = 0 \quad (\beta = 1, 2, \dots p), \tag{30.1}$$

e

$$\frac{dY_{(\alpha)i}}{dt} - \left\{ \begin{matrix} j \\ ik \end{matrix} \right\} Y_{(\alpha)j} \frac{dx^k}{dt} = 0 \quad (\alpha = 1, 2, \dots s). \tag{30.2}$$

Consideriamo ora l'invariante

$$I = A^{u_1 \dots u_s}_{r_1 \dots r_p} X^{r_1}_{(1)} X^{r_2}_{(2)} \dots X^{r_p}_{(p)} Y_{(1)u_1} Y_{(2)u_2} \dots Y_{(s)u_s}.$$

La sua derivata rispetto a t è anch'esso un'invariante, e con l'applicazione di (30.1) e (30.2) e di cambiamenti opportuni di indici saturati troviamo

$$\frac{dI}{dt} = X^{r_1}_{(1)} \dots X^{r_p}_{(p)} Y_{(1)u_1} \dots Y_{(s)u_s} \left\{ \begin{aligned} & \frac{dA^{u_1 \dots u_s}_{r_1 \dots r_p}}{dt} \\ & + \sum_{\alpha=1}^{s} A^{u_1 \dots u_{\alpha-1} k u_{\alpha+1} \dots u_s}_{r_1 \dots r_p} \left\{ \begin{matrix} u_\alpha \\ kn \end{matrix} \right\} \frac{dx^n}{dt} \\ & - \sum_{\beta=1}^{p} A^{u_1 \dots u_s}_{r_1 \dots r_{\beta-1} l r_{\beta+1} \dots r_p} \left\{ \begin{matrix} l \\ r_\beta n \end{matrix} \right\} \frac{dx^n}{dt} \end{aligned} \right\}$$

Dalla legge del quoziente deduciamo che l'espressione tra parentesi a secondo membro di questa equazione è un tensore, che chiamiamo derivata intrinseca, ed indichiamo con $\delta A^{u_1 \ldots u_s}_{r_1 \ldots r_p}/\delta t$. Ne consegue immediatamente che

$$\frac{\delta A^{u_1 \ldots u_s}_{r_1 \ldots r_p}}{\delta t} = \frac{dx^n}{dt}\left[\frac{\partial A^{u_1 \ldots u_s}_{r_1 \ldots r_p}}{\partial x^n} + \sum_{\alpha=1}^{s} A^{u_1 \ldots u_{\alpha-1} k u_{\alpha+1} \ldots u_s}_{r_1 \ldots r_p} \begin{Bmatrix} u_\alpha \\ kn \end{Bmatrix} - \sum_{\beta=1}^{p} A^{u_1 \ldots u_s}_{r_1 \ldots r_{\beta-1} l r_{\beta+1} \ldots r_p} \begin{Bmatrix} l \\ r_\beta n \end{Bmatrix}\right].$$

La legge del quoziente dimostra ancora una volta che l'espressione tra parentesi quadre è un tensore, che indichiamo con $A^{u_1 \ldots u_s}_{r_1 \ldots r_p, n}$ e che chiamiamo appunto derivata covariante.

Capitolo V

TENSORE DI CURVATURA

31. Tensore di Riemann-Christoffel. Esaminiamo ora il problema della commutatività rispetto alla derivazione covariante. Consideriamo anzitutto la derivata covariante di un vettore covariante arbitrario A_j.

$$A_{j,n} = \frac{\partial A_j}{\partial x^n} - \left\{ {l \atop jn} \right\} A_l.$$

Una ulteriore derivazione covariante dà

$$\begin{aligned} A_{j,np} &= \frac{\partial}{\partial x^p}(A_{j,n}) - \left\{ {l \atop jp} \right\} A_{l,n} - \left\{ {l \atop np} \right\} A_{j,l} \\ &= \frac{\partial^2 A_j}{\partial x^n \partial x^p} - \left\{ {l \atop jn} \right\} \frac{\partial A_l}{\partial x^p} - A_l \frac{\partial}{\partial x^p}\left\{ {l \atop jn} \right\} - \left\{ {l \atop jp} \right\} \frac{\partial A_l}{\partial x^n} \\ &+ \left\{ {l \atop jp} \right\}\left\{ {k \atop ln} \right\} A_k - \left\{ {l \atop np} \right\} \frac{\partial A_j}{\partial x^l} + \left\{ {l \atop np} \right\}\left\{ {k \atop jl} \right\} A_k. \end{aligned}$$

Scambiamo gli indici n e p e sottraiamo. Poi cambiando i diversi indici saturati abbiamo

$$\begin{aligned} &A_{j,np} - A_{j,pn} = \\ &\left[\frac{\partial}{\partial x^n}\left\{ {l \atop jp} \right\} - \frac{\partial}{\partial x^p}\left\{ {l \atop jn} \right\} + \left\{ {l \atop ns} \right\}\left\{ {s \atop jp} \right\} - \left\{ {l \atop ps} \right\}\left\{ {s \atop jn} \right\}\right] A_l. \end{aligned}$$

Poiché A_l è un vettore *arbitrario* ne consegue, per la legge del quoziente, che l'espressione in parentesi quadre è un tensore misto del quarto ordine, di ordine controvariante uno e di ordine covariante tre. Introduciamo la notazione

$$R^{l}_{.jnp} \equiv \frac{\partial}{\partial x^n} \left\{ {l \atop jp} \right\} - \frac{\partial}{\partial x^p} \left\{ {l \atop jn} \right\} + \left\{ {l \atop ns} \right\} \left\{ {s \atop jp} \right\} - \left\{ {l \atop ps} \right\} \left\{ {s \atop jn} \right\} : \tag{31.1}$$

$R^{l}_{.jnp}$ è un tensore del quart'ordine, detto **tensore di Riemann-Christoffel.** Esso è formato esclusivamente dal tensore fondamentale g_{ij} e dalle sue derivate fino al secondo ordine incluso. Questo tensore non dipende dalla scelta del vettore A_j. Possiamo ora scrivere.

$$A_{j,np} - A_{j,pn} = R^{l}_{.jnp} A_l. \tag{31.2}$$

Da questa equazione risulta chiaro che condizione necessaria e sufficiente perché la derivazione covariante di *tutti* i vettori sia commutativa, è che il tensore di Riemann-Christoffel sia uguale a zero. Al n. 29 abbiamo già accennato che le equazioni $A_{i,j} = 0$ di regola non sussistono. Infatti, le equazioni (31.2) dimostrano che una condizione necessaria (ma non sufficiente) perché si abbia $A_{i,j} = 0$ è che $R^{l}_{.jnp} A_l = 0$, e questo sistema di equazioni generalmente non è soddisfatto.

Osserviamo che a norma della (31.1) si ha

$$R^{l}_{.jnp} = - R^{l}_{.jpn}, \tag{31.3}$$

cioè, $R^{l}_{.jnp}$ è emisimmetrico rispetto agli indici n e p.

Esercizio 1. Provare che $R^{l}_{.jnp} + R^{l}_{.npj} + R^{l}_{.pjn} = 0$.

Esercizio 2. Provare che $R^{l}_{.lnp} = 0$.

32. Tensore di curvatura. Introduciamo ora il **tensore di curvatura**, tensore covariante definito da

$$R_{rjnp} = g_{rl} R^{l}_{.jnp}. \tag{32.1}$$

Sostituendo a $R^{l}_{.jnp}$ l'espressione che per esso fornisce la (31.1) si ha

$$R_{rjnp} = \frac{\partial}{\partial x^n}\left[g_{rl}\left\{ {l \atop jp} \right\}\right] - \frac{\partial g_{rl}}{\partial x^n}\left\{ {l \atop jp} \right\} - \frac{\partial}{\partial x^p}\left[g_{rl}\left\{ {l \atop jn} \right\}\right]$$
$$+ \frac{\partial g_{rl}}{\partial x^p}\left\{ {l \atop jn} \right\} + g_{rl}\left\{ {l \atop ns} \right\}\left\{ {s \atop jp} \right\} - g_{rl}\left\{ {l \atop ps} \right\}\left\{ {s \atop jn} \right\},$$

relazione che, applicando le (20.3) e (20.4), si riduce a

$$R_{rjnp} = \frac{\partial}{\partial x^n}[jp, r] - \frac{\partial}{\partial x^p}[jn, r] +$$
$$+ \left\{ {l \atop jn} \right\}[rp, l] - \left\{ {l \atop jp} \right\}[rn, l].$$

Possiamo ulteriormente ridurre quest'ultima per mezzo di (20.1) e (20.2) e otteniamo così l'importante formula

$$R_{rjnp} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{rp}}{\partial x^j \partial x^n} + \frac{\partial^2 g_{jn}}{\partial x^r \partial x^p} - \frac{\partial^2 g_{rn}}{\partial x^j \partial x^p} - \frac{\partial^2 g_{jp}}{\partial x^r \partial x^n}\right) \qquad (32.2)$$
$$+ g^{ts}([jn, s]\,[rp, t] - [jp, s]\,[rn, t]).$$

Di qui deduciamo immediatamente le relazioni

$$\left\{ \begin{aligned} R_{rjnp} &= -R_{jrnp}, \\ R_{rjnp} &= -R_{rjpn}, \\ R_{rjnp} &= R_{nprj}, \end{aligned} \right. \qquad (32.3)$$

e

$$R_{rjnp} + R_{rnpj} + R_{rpjn} = 0. \qquad (32.4)$$

Siamo ora di fronte a questo problema: quante componenti aritmeticamente distinte, non nulle, possiede generalmente il tensore R_{rjnp}? Riferendoci alla (32.3) vediamo che una componente è zero se $r = j$ oppure $n = p$. Perciò, a parte il segno, le componenti non nulle sono dei tre seguenti tipi: R_{rjrj}, R_{rjrp}, R_{rjnp}, dove r, j, n e p sono distinti l'uno dall'altro. Ci sono tante componenti del tipo R_{rjrj} quanti sono i modi di combinare r e j, cioè, $\frac{1}{2} N(N-1)$. Ci sono tante componenti del tipo R_{rjrp} quanti sono i modi di combinare j e p, dopo l'esclusione di r, cioè, $\frac{1}{2} N(N-1)$ $(N-2)$. Il numero delle combinazioni di r, j, n e p è $\frac{1}{24} N(N-1)(N-2)(N-3)$. Ma R_{rjnp} è determinato, fatta eccezione per il segno, quando r è accoppiato o con j, o con n, o con p. Così ci sono $\frac{1}{8} N(N-1)(N-2)(N-3)$ componenti del tipo R_{rjnp}. Le equazioni (23.3) ci permettono di riscrivere la (32.4) nella forma

$$R_{jrnp} + R_{jprn} + R_{jnpr} = 0.$$

Così, con una data serie di quattro indici, esiste soltanto un'equazione indipendente del tipo (32.4). Inoltre, se gli indici j, r, n e p non sono distinti, la (32.4) si riduce ad una delle equazioni (32.3). Quindi il numero delle equazioni indipendenti del tipo (32.4) è $\frac{1}{24} N(N-1)(N-2)(N-3)$. Perciò il numero delle componenti distinte di R_{rjnp} è

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} N(N-1) + \frac{1}{2} N(N-1)(N-2) + \\ &+ \frac{1}{8} N(N-1)(N-2)(N-3) - \\ &- \frac{1}{24} N(N-1)(N-2)(N-3) = \frac{1}{12} N^2(N^2-1). \end{aligned}$$

Risulta, di qui, in particolare, che il tensore di curvatura di un V_2 ha soltanto una componente distinta che non si annulla.

Esercizio 1. Dimostrare la relazione (32.4) servendosi di un sistema di coordinate geodetiche.

Esercizio 2. Dimostrare che $R_{1212} = -G\dfrac{\partial^2 G}{\partial u^2}$ per il V_2 il cui elemento lineare è $d^2s = d^2u + G^2dv^2$, dove G è una funzione di u e v.

33. Tensore di Ricci - Invariante di curvatura. A prima vista sembra che vi siano tre differenti modi per contrarre il tensore di Riemann-Christoffel $R^l_{.jnp}$. Ma $R^l_{.lnp} = g^{ls}R_{slnp} = 0$, poiché R_{slnp} è emisimmetrico in s e l, e da (31.3) si ha che $R^l_{.jnl} = -R^l_{.jln}$. Non v'è quindi da considerare altro che la contrazione che porta al cosiddetto **tensore di Ricci**, definito da

$$R_{jn} = R^l_{.jnl} = g^{ls}R_{sjnl}. \tag{33.1}$$

Contraendo l e p in (31.1) e sostituendo dalla (20.6) si ha:

$$R_{jn} = \frac{\partial^2}{\partial x^j \partial x^n}\{\log\sqrt{g}\} - \frac{\partial}{\partial x^l}\left\{ {l \atop jn} \right\} + \left\{ {l \atop ns} \right\}\left\{ {s \atop jl} \right\} - \\ - \left\{ {s \atop jn} \right\}\frac{\partial}{\partial x^s}\{\log\sqrt{g}\}, \tag{33.2}$$

da cui risulta chiaro che R_{jn} è simmetrico. (Se g è negativo, dobbiamo sostituire $\log\sqrt{-g}$ a $\log\sqrt{g}$). L'**invariante di curvatura** è definito da

$$R = g^{jn}R_{jn}. \tag{33.3}$$

Uno spazio per cui si ha $R_{ij} = Ig_{ij}$ in tutti i punti, dove I è un'invariante, è detto **spazio di Einstein.** Moltiplicando internamente per g^{ij} si riconosce che $R = NI$, per cui in uno spazio di Einstein si ha:

$$R_{ij} = \frac{1}{N}Rg_{ij}. \tag{33.4}$$

Esercizio. Dimostrare che in un V_2 è $gR_{ij} = - g_{ij}R_{1212}$ e $gR = - 2R_{1212}$. Si riconosce così che ogni V_2 è uno spazio di Einstein.

34. Identità di Bianchi. Scegliamo un sistema di coordinate geodetiche. Con riferimento alla (31.1), per derivazione covariante si ricava che nel polo si ha:

$$R^{l}_{.jnp,r} = \frac{\partial}{\partial x^r}(R^{l}_{.jnp}) = \frac{\partial^2}{\partial x^r \partial x^n}\left\{ {l \atop jp} \right\} - \frac{\partial^2}{\partial x^p \partial x^r}\left\{ {l \atop jn} \right\}$$

La permutazione ciclica di n, p e r dà altre due equazioni. Sommando otteniamo

$$R^{l}_{.jnp,r} + R^{l}_{.jpr,n} + R^{l}_{.jrn,p} = 0. \tag{34.1}$$

Questa è una equazione tensoriale verificata nel polo di un sistema di coordinate geodetiche. Allora, come sappiamo, essa è verificata in quel polo anche per ogni sistema di coordinate. Ma ogni punto può essere scelto come il polo di un sistema di coordinate geodetiche e quindi l'equazione (34.1) vale in tutti i punti dello spazio.

Il prodotto interno per g_{lm} dà l'**identità di Bianchi**

$$R_{mjnp,r} + R_{mjpr,n} + R_{mjrn,p} = 0. \tag{34.2}$$

Il **tensore di Einstein** è definito da

$$G^{i}_{.j} = g^{il}R_{jl} - \frac{1}{2} R\delta^i_j. \tag{34.3}$$

Il prodotto interno di (34.2) per $g^{mp}g^{jn}$ e l'applicazione di (33.1), (33.3) e (32.3) danno l'equazione

$$R_{,r} - g^{jn}R_{jr,n} - g^{mp}R_{mr,p} = 0,$$

che potrebbe essere scritta

$$R_{,r} = 2g^{jn}R_{jr,n}. \tag{34.4}$$

Derivando la (34.3) in modo covariante si ha

$$G^{i}_{.j,i} = g^{il}R_{jl,i} - \frac{1}{2} R_{,i}\delta^{i}_{j} = g^{il}R_{jl,i} - \frac{1}{2} R_{,j},$$

cioè

$$G^{i}_{.j,i} = 0. \tag{34.5}$$

Questa equazione è importante nella teoria della relatività.

35. Curvatura di Riemann. Da due qualsiasi vettori A^i e B^i in un punto di un V_N, possiamo costruire l'invariante $R_{rjnp}A^rA^nB^jB^p$. Consideriamo che cosa succede se si sostituiscono i vettori A^i e B^i con le due combinazioni lineari

$$X^i = \lambda A^i + \mu B^i, \quad Y^i = \rho A^i + \tau B^i,$$

dove λ, μ, ρ e τ sono invarianti. Il calcolo diretto, con l'aiuto di (32.3), dimostra che

$$R_{rjnp}X^rX^nY^jY^p = (\lambda\tau - \rho\mu)^2 R_{rjnp}A^rA^nB^jB^p.$$

Così l'espressione $R_{rjnp}A^rA^nB^jB^p$, che è un invariante rispetto alle trasformazioni di coordinate, è *quasi* un invariante per trasformazioni lineari di vettori. Al fine di ottenere un'espressione che sia invariante anche per trasformazioni lineari di vettori osserviamo che

$$\begin{aligned}
&(g_{rn}g_{jp} - g_{rp}g_{jn})\, X^rX^nY^jY^p \\
&= (\lambda A_n + \mu B_n)(\lambda A^n + \mu B^n)(\rho A_p + \tau B_p)(\rho A^p + \tau B^p) \\
&- (\lambda A_p + \mu B_p)(\rho A^p + \tau B^p)(\lambda A_j + \mu B_j)(\rho A^j + \tau B^j) \\
&= (e_A\lambda^2A^2 + e_B\mu^2B^2 + 2\lambda\mu \cos\theta\, AB)(e_A\rho^2A^2 + e_B\tau^2B^2 + \\
&+ 2\rho\tau\cos\theta\, AB) - (e_A\lambda\rho A^2 + e_B\mu\tau B^2 + [\lambda\tau + \rho\mu]\cos\theta\, AB)^2 \\
&= (\lambda\tau - \mu\rho)^2 (e_Ae_B - \cos^2\theta)\, A^2B^2 \\
&= (\lambda\tau - \mu\rho)^2 (g_{rn}g_{jp} - g_{rp}g_{jn})\, A^rA^nB^jB^p,
\end{aligned}$$

dove θ è l'angolo tra i vettori A^i e B^i. Ne consegue che

$$K \equiv \frac{R_{rjnp}A^rA^nB^jB^p}{(g_{rn}g_{jp} - g_{rp}g_{jn})\, A^rA^nB^jB^p} \tag{35.1}$$

è un invariante che rimane immutato in un punto quando i due vettori che lo determinano sono sostituiti da una qualunque combinazione lineare. Questo invariante è detto **curvatura di Riemann** dello spazio V_N associata ai vettori A^i e B^i. Si noti che il denominatore di K è unitario se i vettori A^i e B^i sono vettori ortogonali unitari.

In ogni punto di uno spazio bidimensionale esistono solo due vettori indipendenti. Quindi la curvatura di Riemann di un V_2 è determinata univocamente in ciascun punto. Il suo valore si stabilisce facilmente scegliendo i due vettori le cui componenti sono rispettivamente (1,0) e (0,1). Si ha allora

$$K = \frac{R_{1212}}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} = \frac{R_{1212}}{g}\,. \tag{35.2}$$

36. Spazio piatto. Diciamo che uno spazio è **piatto** se $K = 0$ in ogni punto di esso. Da (35.1) si ha che condizione necessaria e sufficiente perché ciò si verifichi è che

$$R_{rjnp}\, A^rA^nB^jB^p = 0$$

per *tutti* i vettori A^i e B^i. In virtù delle equazioni (32.3) si ha che

$$R_{rjnp} + R_{njrp} + R_{nprj} + R_{rpnj} = 0,$$

cioè,

$$R_{rjnp} + R_{rpnj} = 0,$$

che può essere scritta

$$R_{rjnp} = R_{rpjn}\,.$$

Scambiando j, n e p ciclicamente, si ottiene

$$R_{rnpj} = R_{rjnp}\,,$$

e quindi

$$R_{rjnp} = R_{rpjn} = R_{rnpj}\,.$$

Sostituendo in (32.4) si ricava immediatamente

$$R_{rjnp} = 0.$$

Inversamente, se $R_{rnjp} = 0$, è chiaro che $K = 0$. Perciò, condizione necessaria e sufficiente a che uno spazio V_N sia piatto, è che il tensore di Riemann-Christoffel sia identicamente nullo.

In uno spazio piatto $R^l_{.jnp} = 0$, quindi da (31.2) deduciamo che in uno spazio piatto le equazioni $A_{i,j} = 0$ sussistono. Il prodotto interno per $\frac{dx^i}{dt}$ dà $\frac{\delta A_i}{\delta t} = 0$: pertanto in uno spazio piatto la proprietà di parallelismo è indipendente dalla scelta di una curva. Potremmo dire cioè che il parallelismo è una proprietà assoluta di uno spazio piatto.

Un esempio familiare di uno spazio piatto è lo spazio euclideo bidimensionale per il quale la metrica è $ds^2 = dx^2 + dy^2$ in coordinate cartesiane ortogonali, e $ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2$ in coordinate polari.

Esercizio. Se la metrica di uno spazio piatto bidimensionale è $f(r)\,[(dx^1)^2 + (dx^2)^2]$, dove $(r)^2 = (x^1)^2 + (x^2)^2$, dimostrare che è $f(r) = c(r)^k$ dove c e k sono costanti.

37. Spazio a curvatura costante. Vogliamo ora considerare spazi in cui la curvatura di Riemann in ogni punto non dipende dalla scelta dei vettori associati A^i e B^i. Da (35.1), si ha che condizione necessaria e sufficiente a tal fine è che risulti

$$\{K(g_{rn}g_{jp} - g_{rp}g_{jn}) - R_{rjnp}\}\, A^r A^n B^j B^p = 0$$

per *tutti* i vettori A^i e B^i Un calcolo analogo a quello del paragrafo precedente dimostrerà che questa condizione si riduce a

$$R_{rjnp} = K(g_{rn}g_{jp} - g_{rp}g_{jn}),$$

dove K è ora una funzione delle coordinate x^i.

La derivazione covariante dà

$$R_{rjnp,t} = K_{,t}(g_{rn}g_{jp} - g_{rp}g_{jn}).$$

Sostituendo nell'identità di Bianchi (34.2) otteniamo

$$K_{,r}(g_{mn}g_{jp} - g_{mp}g_{jn}) + K_{,n}(g_{mp}g_{jr} - g_{mr}g_{jp}) \\ + K_{,p}(g_{mr}g_{jn} - g_{mn}g_{jr}) = 0.$$

Il prodotto interno per $g^{mn}g^{jp}$ dà poi

$$(N-1)(N-2)K_{,r} = 0.$$

Di qui segue, se $N > 2$, che K è costante. Abbiamo così dimostrato il teorema di Schur: « se in ciascun punto di uno spazio $V_N (N > 2)$, la curvatura di Riemann è funzione delle coordinate soltanto, allora questa è costante in tutto il V_N ». Un tale V_N è detto **spazio a curvatura costante.**

La metrica del V_2 formato dalla superficie di una sfera di raggio a è $ds^2 = a^2(d\theta^2 + \text{sen}^2\,\theta\, d\psi^2)$ in coordinate polari sferiche. Il lettore verifichi che $R_{1212} = a^2 \,\text{sen}^2\,\theta$ e che di conseguenza, per la (35.2), la superficie di una sfera è una superficie a curvatura costante, pari a $1/a^2$ se a è il raggio della sfera.

Esercizio 1. Dimostrare che uno spazio a curvatura costante è uno spazio di Einstein.

Esercizio 2. Dimostrare che in uno spazio euclideo V_4 l'ipersfera

$$x^1 = c\,\text{sen}\,\theta\,\text{sen}\,\varphi\,\text{sen}\,\psi, \qquad x^2 = c\,\text{sen}\,\theta\,\text{sen}\,\varphi\,\cos\psi$$

$$x^3 = c\,\text{sen}\,\theta\cos\varphi, \qquad x^4 = c\cos\theta$$

è un V_3 con curvatura costante ed uguale a $1/c^2$.

Capitolo VI

GEOMETRIA DIFFERENZIALE TRIDIMENSIONALE EUCLIDEA

La geometria euclidea studia le proprietà delle figure che sono invarianti rispetto alle traslazioni e alle rotazioni nello spazio. Essa può essere suddivisa in geometria algebrica e geometria differenziale. La prima studia, attraverso metodi algebrici, proprietà «in grande» di enti geometrici, quali, per es., la classe o il grado di una curva. La seconda discute, per mezzo del calcolo, proprietà «in piccolo»: per es., la curvatura totale di una superficie in un punto, la quale, com'è noto, dipende soltanto dalla forma della superficie in quel punto. Questo capitolo non pretende naturalmente di costituire un corso completo su tale soggetto. Tuttavia, viene sviluppata una teoria sufficiente a indicare scopi e possibilità del metodo tensoriale.

38. Tensori di permutazione. Introduciamo nello spazio tridimensionale euclideo le quantità definite da

$$\varepsilon_{ijk} = \sqrt{g}\, e_{ijk}; \quad \varepsilon^{ijk} = \frac{1}{\sqrt{g}}\, e_{ijk}, \tag{38.1}$$

dove e_{ijk} sono i **simboli di permutazione** definiti dalle seguenti condizioni:

a) $e_{ijk} = 0$, se due degli indici i, j e k sono eguali,

b) $e_{123} = e_{231} = e_{312} = +1$,

c) $e_{132} = e_{321} = e_{213} = -1$, e g è il determinante formato dal tensore fondamentale g_{ij} dello spazio riferito ad un sistema generale di coordinate, che non è necessariamente un sistema cartesiano ortogonale. Le definizioni ci dimostrano che e_{ijk}, ε_{ijk}, ε^{ijk} sono emisimmetrici in tutti i loro indici. (Notare che in questo capitolo l'intervallo di variazione degli indici latini è da 1 a 3).

Innanzitutto proveremo che, malgrado e_{ijk} non sia un tensore, sia ε_{ijk} che ε^{ijk} sono tensori. Osserviamo che

$$e_{ijk}\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^l}\frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^m}\frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^n} = e_{ijk}\frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^l}\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^m}\frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^n} =$$

$$= -e_{ijk}\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^m}\frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^l}\frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^n}\,.$$

Così $e_{ijk}\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^l}\frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^m}\frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^n}$ è emisimmetrico in l e m; ugualmente esso è emisimmetrico negli indici l, m e n. Ma questa espressione, a parte il segno, è il determinante jacobiano $\left|\frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^s}\right|$. Pertanto dalla teoria dei determinanti deriva che

$$e_{ijk}\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^l}\frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^m}\frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^n} = e_{lmn}\left|\frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^s}\right|.$$

Ora il tensore fondamentale g_{ij} si trasforma in $\bar{g}_{ij}$ quando si passa ad un nuovo sistema di coordinate $\bar{x}^i$. Dalla (21.1) rileviamo che i loro determinanti, g e $\bar{g}$, soddisfano l'equazione.

$$\bar{g} = g\left|\frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^s}\right|^2.$$

Le quantità ε_{ijk} si trasformano in $\bar{\varepsilon}_{ijk}$, dove

$$\bar{\varepsilon}_{lmn} = \sqrt{\bar{g}}\,e_{lmn} = \sqrt{g}\,e_{lmn}\left|\frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^s}\right| = \sqrt{g}\,e_{ijk}\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^l}\frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^m}\frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^n}\,.$$

Ne consegue

$$\bar{\varepsilon}_{lmn} = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^l} \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^m} \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^n}, \tag{38.2}$$

dal che si vede che ε_{ijk} è un tensore covariante del terzo ordine. Inoltre

$$\bar{\varepsilon}^{lmn} = \frac{1}{\sqrt{\bar{g}}} e_{lmn} = \frac{1}{\sqrt{g}} \left| \frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^s} \right| e_{lmn} = \frac{1}{\sqrt{g}} e_{ijk} \frac{\partial \bar{x}^l}{\partial x^i} \frac{\partial \bar{x}^m}{\partial x^j} \frac{\partial \bar{x}^n}{\partial x^k};$$

pertanto,

$$\varepsilon^{lmn} = \bar{\varepsilon}^{ijk} \frac{\partial x^l}{\partial \bar{x}^i} \frac{\partial x^m}{\partial \bar{x}^j} \frac{\partial x^n}{\partial \bar{x}^k},$$

il che dimostra essere ε^{lmn} un tensore controvariante del terzo ordine. Chiamiamo ε_{ijk} e ε^{ijk} **tensori di permutazione.**

Se il sistema di coordinate è cartesiano ortogonale $g = 1$ e i tensori di permutazione hanno come proprie componenti i simboli di permutazione. In questo sistema di coordinate i derivati covarianti $\varepsilon_{ijk,l}$ e $\varepsilon^{ijk}{}_{,l}$, i quali sono entrambi tensori, sono zero. Di conseguenza i derivati covarianti $\varepsilon_{ijk,l}$ e $\varepsilon^{ijk}{}_{,l}$ sono tensori nulli in tutti i sistemi di coordinate. Ciò significa, in particolare, che i tensori di permutazione si comportano come costanti rispetto alla derivazione covariante.

Dal vettore covariante A_i si può formare il vettore

$$B^j = \varepsilon^{jkl} A_{l,k}$$

che chiamiamo **rotore** del vettore A_i e indichiamo col simbolo rot A_i (oppure curl A_i).

Esercizio 1. Stabilire direttamente, che $\varepsilon_{ijk,l} = 0$.

Esercizio 2. Provare che $\varepsilon_{ijk} = g_{il} g_{jm} g_{kn} \varepsilon^{lmn}$.

Esercizio 3. Dimostrare che le componenti di rot A_i sono

$$\frac{1}{\sqrt{g}}\left(\frac{\partial A_3}{\partial x^2}-\frac{\partial A_2}{\partial x^3}\right), \quad \frac{1}{\sqrt{g}}\left(\frac{\partial A_1}{\partial x_3}-\frac{\partial A_3}{\partial x^1}\right),$$
$$\frac{1}{\sqrt{g}}\left(\frac{\partial A_2}{\partial x^1}-\frac{\partial A_1}{\partial x^2}\right).$$

39. Prodotto vettore. Dai due vettori covarianti A_i e B_i possiamo formare il vettore controvariante

$$C^i = \varepsilon^{ijk} A_j B_k\,. \tag{39.1}$$

Allo scopo di dare un'interpretazione geometrica al vettore C^i, scegliamo un sistema di coordinate cartesiane ortogonali. In un tale sistema, la distinzione tra controvarianza e covarianza sparisce e le C^i sono ora le componenti del prodotto vettore di A_i e B_i. Pertanto C^i è un vettore di grandezza AB sen θ, dove θ è l'angolo tra questi vettori, ortogonale ad entrambi i vettori A_i e B_i, e di verso tale che A_i, B_i e C^i formino una terna levogira.

40. Formule di Frénet. In questo numero ci occuperemo di proprietà differenziali delle curve. Supponiamo che una curva sia data dalle equazioni $x^i = x^i(s)$, dove il parametro s è l'ascissa curvilinea lungo la curva. Allora il versore della tangente alla curva, è $T^i \equiv dx^i/ds$ e soddisfa l'equazione $g_{ij}T^iT^j = 1$. Derivando otteniamo $g_{ij}\dfrac{\delta T^i}{\delta s}T^j = 0$. Cioè, $\dfrac{\delta T^i}{\delta s}$ è un vettore ortogonale al versore tangente. La sua grandezza $\varkappa$ è chiamata **curvatura** della curva, ed il versore

$$N^i = \frac{1}{\varkappa}\frac{\delta T^i}{\delta s} \tag{40.1}$$

è detto versore della **normale principale.**

Definiamo ora il versore della **binormale**, B^i, come il vettore unitario, ortogonale sia alla tangente che alla normale principale, e orientato in modo tale che i versori della tangente, della normale principale e della binormale formino una terna levogira. Perciò da (39.1) abbiamo

$$B^i = \varepsilon^{ijk} T_j N_k. \tag{40.2}$$

Dal momento che i vettori T^i e N^i sono ortogonali, si ha $g_{ij}T^iN^j = 0$. Per derivazione intrinseca si ottiene

$$g_{ij}T^i \frac{\delta N^j}{\delta s} + g_{ij}\frac{\delta T^i}{\delta s} N^j = 0.$$

Ponendo in questa relazione al posto di $\dfrac{\delta T^i}{\delta s}$ l'espressione per essa data dalla (40.1) e sostituendo $g_{ij}N^iN^j$ con $g_{ij}T^iT^j$, entrambi uguali all'unità, si ha:

$$g_{ij}T^i\left(\frac{\delta N^j}{\delta s} + \varkappa T^j\right) = 0.$$

Derivando $g_{ij}N^iN^j = 1$, si ottiene $g_{ij}N^i \dfrac{\delta N^j}{\delta s} = 0$; così

$$g_{ij}N^i\left(\frac{\delta N^j}{\delta s} + \varkappa T^j\right) = 0,$$

e pertanto il vettore $\dfrac{\delta N^j}{\delta s} + \varkappa T^j$ risulta ortogonale sia al versore tangente T^i che al versore della normale principale N^i, cioè esso ha la direzione del versore della binormale B^j, e possiamo scrivere

$$B^j = \frac{1}{\tau}\left(\frac{\delta N^j}{\delta s} + \varkappa T^j\right). \tag{40.3}$$

L'invariante τ così introdotto è detto **torsione** della curva (1). Si noti che τ può essere positiva o negativa, laddove in-

(1) In alcuni testi τ sta viceversa a indicare l'inverso della torsione.

vece la curvatura, come grandezza di un vettore, è essenzialmente positiva.

Derivando la (40.2) intrinsecamente e tenendo conto delle (40.1) e (40.3) si ha

$$\begin{aligned}\frac{\delta B^i}{\delta s} &= \varepsilon^{ijk}\frac{\delta T_j}{\delta s}N_k + \varepsilon^{ijk}T_j\frac{\delta N_k}{\delta s}\\ &= \varkappa\varepsilon^{ijk}N_jN_k + \varepsilon^{ijk}T_j\left[\tau B_k - \varkappa T_k\right]\end{aligned}$$

relazione che si riduce, a causa dell'emisimmetria di ε^{ijk}, alla

$$\frac{\delta B^i}{\delta s} = \tau\varepsilon^{ijk}T_jB_k.$$

Ma T_i, N_i, B_i formano un sistema levogiro di vettori unitari; così $\varepsilon^{ijk}T_jB_k = -N^i$ e le nostre equazioni divengono

$$\frac{\delta B^i}{\delta s} = -\tau N^i. \tag{40.4}$$

Le relazioni (40.1), (40.3) e (40.4) sono chiamate **formule di Frénet.** In considerazione della loro importanza nella teoria delle curve raggruppiamo queste formule insieme, per un comodo riferimento, nella forma

$$\left\{\begin{aligned}\frac{\delta T^i}{\delta s} &= \qquad\quad \varkappa N^i\\ \frac{\delta N^i}{\delta s} &= -\varkappa T^i \qquad\quad + \tau B^i\\ \frac{\delta B^i}{\delta s} &= \qquad -\tau N^i.\end{aligned}\right. \tag{40.5}$$

Se il sistema di coordinate è cartesiano ortogonale le derivate intrinseche diventano le derivate ordinarie e si ritrovano le ben note formule di Frénet.

Esercizio 1. Dimostrare che $\varkappa^2 = g_{ij} \frac{\delta T^i}{\delta s} \frac{\delta T^j}{ds}$.

Esercizio 2. Provare che $\tau = \varepsilon^{ijk} T_i N_j \frac{\delta N_k}{ds}$.

Esercizio 3. Un'**elica** è definita come una curva il cui vettore tangente forma un angolo costante con una direzione fissa. Provare che condizione necessaria e sufficiente perché una curva sia una elica, è che il rapporto della torsione alla curvatura sia costante.

Esercizio 4. Provare che $\varepsilon^{ijk} \frac{\delta T_i}{\delta s} \frac{\delta^2 T_j}{\delta s^2} \frac{\delta^3 T_k}{\delta s^3} = \varkappa^5 \frac{d}{ds}\left(\frac{\tau}{\varkappa}\right)$. Quindi una curva è una elica se e solo se

$$\varepsilon^{ijk} \frac{\delta T_i}{\delta s} \frac{\delta^2 T_j}{\delta s^2} \frac{\delta^3 T_k}{\delta s^3} = 0.$$

41. Superfici - Prima forma fondamentale. Le tre equazioni

$$x^1 = x^1(u^1, u^2); \quad x^2 = x^2(u^1, u^2); \quad x^3 = x^3(u^1, u^2), \tag{41.1}$$

dove u^1 e u^2 sono parametri e le x^i sono tre funzioni di u^1 e u^2 reali e continue rappresentano generalmente una superficie. Queste equazioni più brevemente possono essere scritte $x^i = x^i(u^\alpha)$, intendendo naturalmente che gli indici greci varino sempre da 1 a 2. Un punto nel quale la matrice jacobiana $\left[\frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha}\right]$ è di rango due, è detto punto *regolare*. Un punto potrebbe essere non regolare per uno di questi due motivi: o perché è una singolarità della superficie (per esempio, il vertice di un cono), o perché è una singolarità della rappresentazione parametrica [per esempio, i poli di una sfera: v. equazione (41.2)].

Ciascuna coppia di valori di u^α determina un punto sulla superficie. Cioè, le u^α formano un sistema di coordinate sopra di essa. Quindi un'equazione del tipo $f(u^1, u^2) = 0$ deve definire una curva. Anche se un unico punto della superficie corrisponde ad una coppia prefissata di valori u^α, non è necessariamente vero il contrario. Ciò è illustrato dalle equazioni

$$x^1 = a \operatorname{sen} u^1 \cos u^2; \quad x^2 = a \operatorname{sen} u^1 \operatorname{sen} u^2; \quad x^3 = a \cos u^1, \tag{41.2}$$

che individuano la superficie di una sfera di raggio a. Qui e nel seguito, tuttavia, considereremo i parametri limitati in modo che anche il contrario sia valido. Nel nostro esempio basterà, a tal fine, che siano soddisfatte le limitazioni $0 \leqq u^1 \leqq \pi$ e $0 \leqq u^2 < 2\pi$: così, fatta eccezione per i due poli, a ciascun punto della sfera corrisponde una coppia unica di valori delle u^α. Le equazioni $u^1 = 0$ e $u^1 = \pi$ non rappresentano curve, ma i due poli, rispettivamente (ai poli, la coordinata u^2 è indeterminata).

Escluderemo dalla nostra discussione i punti singolari, considerando soltanto la porzione di una superficie in cui vi è una corrispondenza univoca tra i suoi punti e le coppie di valori delle coordinate u^α. Cioè in questa porzione ogni curva della famiglia $u^1 =$ costante interseca ogni curva della famiglia $u^2 =$ costante in un punto solo. Le curve $u^1 =$ costante sono chiamate **curve $\mathbf{u^2}$**, e le curve $u^2 =$ costante, **curve $\mathbf{u^1}$**. Globalmente esse sono definite **curve coordinate** o **parametriche** sulla superficie. Scegliamo lungo una curva coordinata la direzione positiva corrispondente ai valori crescenti delle variabili u^1 o u^2 rispettivamente.

I vettori controvarianti dx^i e du^α che rappresentano lo stesso spostamento nello spazio e sulla superficie rispettivamente, sono collegati dalle equazioni

$$dx^i = \frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha} du^\alpha \tag{41.3}$$

dove estendiamo la convenzione della sommatoria agli indici greci. Quindi l'elemento lineare ds sulla superficie è dato da

$$ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j = g_{ij} \frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha} \frac{\partial x^j}{\partial u^\beta} du^\alpha du^\beta.$$

Scriviamo

$$a_{\alpha\beta} = g_{ij} \frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha} \frac{\partial x^j}{\partial u^\beta}, \tag{41.4}$$

da cui risulta chiaro che $a_{\alpha\beta}$ è simmetrico, ed abbiamo così

$$ds^2 = a_{\alpha\beta} du^\alpha du^\beta. \tag{41.5}$$

Applichiamo a questa equazione la legge del quoziente. Poiché $a_{\alpha\beta}$ è simmetrico ne consegue che $a_{\alpha\beta}$ è un tensore covariante rispetto alle trasformazioni del sistema coordinato u^α. Lo chiameremo il **tensore superficiale fondamentale.** Analogamente $a_{\alpha\beta} du^\alpha du^\beta$ è detta **prima forma fondamentale** della superficie.

Scegliamo un sistema di coordinate cartesiane ortogonali nello spazio. Otteniamo allora la metrica nella nota forma

$$ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2,$$

dove $u = u^1$, $v = u^2$ e

$$E = \sum_i \frac{\partial x^i}{\partial u} \frac{\partial x^i}{\partial u}, \quad F = \sum_i \frac{\partial x^i}{\partial u} \frac{\partial x^i}{\partial v}, \quad G = \sum_i \frac{\partial x^i}{\partial v} \frac{\partial x^i}{\partial v}.$$

42. Vettori superficiali. Quando trasformiamo le coordinate nello spazio, dx^i è un vettore controvariante ma du^α è un invariante. D'altra parte, se trasformiamo le coordinate u^α sulla superficie, dx^i è un invariante ma du^α è un vettore controvariante. Quindi le equazioni (41.3) indicano che possiamo considerare $\partial x^i/\partial u^\alpha$ tanto come vettore spaziale controvariante quanto come vettore superficiale covariante. Possiamo perciò introdurre la notazione

$$x^i_\alpha \equiv \frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha} \tag{42.1}$$

e riscrivere la (41.4) nella forma

$$a_{\alpha\beta} = g_{ij} x^i_\alpha x^j_\beta. \tag{42.2}$$

Una curva sulla superficie è rappresentata parametricamente dalle equazioni $u^\alpha = u^\alpha(t)$. Il vettore $\dfrac{du^\alpha}{dt}$ è un vettore tangente a questa curva. Le sue componenti spaziali sono date dalle equazioni

$$\frac{dx^i}{dt} = \frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha}\frac{du^\alpha}{dt} = x^i_\alpha \frac{du^\alpha}{dt}. \tag{42.3}$$

Ma, se le dx^i/dt sono assegnate, le (42.3) costituiscono un sistema di tre equazioni nelle due incognite du^α/dt. Esso in genere non ammette soluzioni, a meno che il vettore non giaccia sulla superficie, nel qual caso esisterebbe una unica soluzione.

Consideriamo ora un campo di vettori superficiali A^α. Mediante le equazioni differenziali $du^\alpha/dt = A^\alpha$, possiamo individuare un'unica curva C sulla superficie, una volta che il campo vettoriale sia fissato in qualche punto particolare. Allora A^α è un vettore superficiale tangente a questa curva C. Designamo le componenti spaziali di A^α con A^i; le equazioni (42.3) specificano che queste componenti sono legate dalle relazioni

$$A^i = x^i_\alpha A^\alpha. \tag{42.4}$$

La grandezza del vettore A^i è data da

$$(A)^2 = g_{ij}A^iA^j = g_{ij}x^i_\alpha x^j_\beta A^\alpha B^\beta,$$

cioè

$$(A)^2 = a_{\alpha\beta}A^\alpha A^\beta. \tag{42.5}$$

In particolare du^α/ds è il versore tangente ad una curva sulla superficie, se il parametro s è l'ascissa curvilinea lungo di essa.

L'angolo θ tra i due vettori unitari A^i e B^i si ottiene da

$$\cos\theta = g_{ij}A^iB^j = g_{ij}x^i_\alpha x^j_\beta A^\alpha B^\beta,$$

cioè

$$\cos\theta = a_{\alpha\beta}A^\alpha B^\beta. \tag{42.6}$$

Segue che condizione necessaria e sufficiente per l'ortogonalità di due vettori superficiali A^α e B^α è che

$$a_{\alpha\beta}A^\alpha B^\beta = 0. \tag{42.7}$$

Dalle equazioni (42.5), (42.6) e (42.7) vediamo che le formule abituali si applicano ugualmente bene nel caso della superficie, purché si impieghino in esse le componenti del vettore sulla superficie ed il tensore superficiale fondamentale. Possiamo ancora nel modo usuale innalzare ed abbassare gli indici dei tensori superficiali usando il tensore superficiale fondamentale $a_{\alpha\beta}$ e il suo coniugato tensore simmetrico $a^{\alpha\beta}$.

Questi due tensori sono legati dalle equazioni

$$a_{\alpha\beta}a^{\alpha\gamma} = \delta^\gamma_\beta, \tag{42.8}$$

dove δ^γ_β è la delta di Kronecker, bidimensionale. Si può notare che

$$a^{11} = a_{22}/a; \ a^{12} = a^{21} = -a_{12}/a; \ a^{22} = a_{11}/a, \tag{42.9}$$

dove

$$a = a_{11}a_{22} - (a_{12})^2.$$

Esercizio. Dimostrare che $A_\alpha = x^r_\alpha A_r$.

43. Tensore superficiale di permutazione. Abbiamo introdotto, al numero 38, i tensori di permutazione nello spazio. Introduciamo analogamente sulla superficie le quantità definite da

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \sqrt{a}\, e_{\alpha\beta}; \quad \varepsilon^{\alpha\beta} = \frac{1}{\sqrt{a}}\, e_{\alpha\beta}, \tag{43.1}$$

dove

$$e_{11} = e_{22} = 0; \quad e_{12} = +1; \quad e_{21} = -1.$$

Si lascia come esercizio ai lettori dimostrare che $\varepsilon_{\alpha\beta}$ e $\varepsilon^{\alpha\beta}$ sono tensori superficiali emisimmetrici rispettivamente covariante e controvariante. Essi sono detti **tensori superficiali di permutazione.** Vediamo che si può ottenere $\varepsilon_{\alpha\beta}$ da $\varepsilon^{\alpha\beta}$ abbassando gli indici poiché $\varepsilon_{\alpha\beta} = a_{\alpha\gamma}a_{\beta\delta}\varepsilon^{\gamma\delta}$.

Stabiliamo ora un'importante formula per l'angolo θ tra i due vettori *unitari* A^α e B^α. Quest'angolo è dato da $\cos\theta = a_{\alpha\beta}A^\alpha B^\beta$. Di conseguenza, usando la (42.6) si ha

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}^2\theta &= 1 - a_{\beta\alpha}A^\alpha B^\beta a_{\gamma\delta}A^\gamma B^\delta \\ &= (a_{\alpha\gamma}a_{\beta\delta} - a_{\alpha\beta}a_{\gamma\delta})\, A^\alpha A^\gamma B^\beta B^\delta \\ &= a e_{\alpha\delta}e_{\gamma\beta}A^\alpha A^\gamma B^\beta B^\delta \\ &= \varepsilon_{\alpha\delta}\varepsilon_{\gamma\beta}A^\alpha A^\gamma B^\beta B^\delta \\ &= (\varepsilon_{\alpha\delta}A^\alpha B^\delta)^2.\end{aligned}$$

Per rimuovere l'ambiguità del segno si sceglie per convenzione il valore di θ che soddisfa alla condizione

$$\operatorname{sen}\theta = +\,\varepsilon_{\alpha\delta}A^\alpha B^\delta. \tag{43.2}$$

In accordo con tale convenzione, diciamo che la rotazione da C^α a D^α è positiva se l'invariante $\varepsilon_{\alpha\beta}C^\alpha D^\beta$ è positivo. Ciò equivale a scegliere come rotazione positiva quella che porta da C^α a D^α attraverso un angolo minore o uguale a π.

Formiamo il vettore controvariante

$$B^\beta = \varepsilon^{\alpha\beta}A_\alpha \tag{43.3}$$

dal vettore covariante *unitario* A_α. La sua grandezza è data da

$$\begin{aligned}(B)^2 &= a_{\alpha\beta}B^\alpha B^\beta = a_{\alpha\beta}\varepsilon^{\gamma\alpha}\varepsilon^{\delta\beta}A_\gamma A_\delta \\ &= a_{22}(\varepsilon^{12})^2\,(A_1)^2 + 2a_{12}\varepsilon^{12}\varepsilon^{21}A_1A_2 + a_{11}(\varepsilon^{21})^2\,(A_2)^2 \\ &= \frac{1}{a}\,\{a_{22}(A_1)^2 - 2a_{12}A_1A_2 + a_{11}(A_2)^2\},\end{aligned}$$

cioè, in virtù delle (42.9),

$$\begin{aligned}(B)^2 &= a^{11}(A_1)^2 + 2a^{12}A_1A_2 + a^{22}(A_2)^2 \\ &= a^{\alpha\beta}A_\alpha A_\beta = (A)^2 = 1.\end{aligned}$$

Così B^α è un vettore unitario. Inoltre l'angolo θ tra A^α e B^α soddisfa alle condizioni

$$\text{sen}\,\theta = \varepsilon_{\alpha\beta} A^\alpha B^\beta = \varepsilon^{\alpha\beta} A_\alpha B_\beta = B^\beta B_\beta = 1.$$

Perciò $\theta = \pi/2$, e, con la precedente convenzione, l'equazione (43.3) determina il vettore unitario B^α ortogonale al vettore unitario A^α e orientato in modo che la rotazione da A^α a B^α sia positiva.

Applichiamo ora la (43.2) per calcolare l'angolo ω tra le curve coordinate. I vettori unitari tangenti alle curve u^1 e u^2, sono rispestivamente $\frac{1}{\sqrt{a_{11}}}\,\delta^\alpha_1$ e $\frac{1}{\sqrt{a_{22}}}\,\delta^\alpha_2$. Quindi lo angolo ω soddisfa alle condizioni

$$\text{sen}\,\omega = \frac{1}{\sqrt{a_{11}a_{22}}}\,\varepsilon_{\alpha\beta}\delta^\alpha_1\delta^\beta_2 = \frac{1}{\sqrt{a_{11}a_{22}}}\,\varepsilon_{12} = \sqrt{\frac{a}{a_{11}a_{22}}}. \qquad (43.4)$$

Rileviamo di qui che la rotazione, a partire dalla direzione di una curva u^1 fino a quella di una curva u^2, è sempre positiva.

È facile dedurre che la condizione necessaria e sufficiente perché le curve coordinate siano ortogonali in tutti i punti della superficie, è che a_{12} si annulli ovunque. Allora diciamo che le coordinate sono **curvilinee ortogonali.**

44. Derivazione covariante superficiale. Possiamo formare i simboli di Christoffel partendo dal tensore superficiale fondamentale $a_{\alpha\beta}$, e introducendo quindi la derivata covariante e le derivate intrinseche, che sono ora dei tensori superficiali. $A_{\alpha,\beta}$ indicherà così la derivata covariante di A_α rispetto a u^β. Scrivendo per esteso si ha

$$A_{\alpha,\beta} = \frac{\partial A_\alpha}{\partial u^\beta} - \left\{ {\varepsilon \atop \alpha\beta} \right\} A_\varepsilon.$$

Non ci sarà confusione tra i simboli di Christoffel formati con il tensore g_{ij} e quelli formati con $a_{\alpha\beta}$, poiché gli indici latini e greci distingueranno chiaramente quale simbolo si vuol indicare. Possiamo anche formare il tensore superficiale di Riemann-Christoffel $R^{\alpha}_{.\beta\gamma\delta}$ da $a_{\alpha\beta}$ ed il tensore superficiale di curvatura $R_{\varepsilon\beta\gamma\delta} = a_{\varepsilon\alpha}R^{\alpha}_{.\beta\gamma\delta}$.

Riprendendo l'argomento del n. 26, possiamo dimostrare che sulla superficie le geodetiche sono le soluzioni delle equazioni differenziali

$$\frac{\delta}{\delta s}\left(\frac{du^{\alpha}}{ds}\right) \equiv \frac{d^2u^{\alpha}}{ds^2} + \left\{ {\alpha \atop \beta\gamma} \right\} \frac{du^{\beta}}{ds}\frac{du^{\gamma}}{ds} = 0. \tag{44.1}$$

Corrispondentemente alla (27.1) si ha altresì l'equazione

$$a_{\alpha\beta}\frac{du^{\alpha}}{ds}\frac{du^{\beta}}{ds} = 1 \tag{44.2}$$

cui devono soddisfare le geodetiche. Quindi, in pratica, dobbiamo considerare soltanto una delle due equazioni (44.1) insieme con l'equazione del primo ordine (44.2).

Come al n. 28, possiamo introdurre sulla superficie un sistema di coordinate geodetiche, in modo che in un particolare punto, detto polo, tutti i simboli di Christoffel superficiali siano nulli. Nel polo, la derivata covariante e le derivate intrinseche si riducono rispettivamente alle corrispondenti derivate parziali e totali.

La teoria del parallelismo, accennata al n. 29, si applica anche ai vettori superficiali. Il campo vettoriale A^{α} si dice parallelo lungo la curva $u^{\alpha} = u^{\alpha}(t)$ se

$$\frac{\delta A^{\alpha}}{\delta t} \equiv \frac{dA^{\alpha}}{dt} + \left\{ {\alpha \atop \beta\gamma} \right\} A^{\beta}\frac{du^{\gamma}}{dt} = 0.$$

Si noti che le derivate covarianti di $a_{\alpha\beta}$, $a^{\alpha\beta}$ e δ^{α}_{β} sono nulle. Non possiamo applicare il metodo del n. 38 per provare che $\varepsilon_{\alpha\beta,\gamma}$ e $\varepsilon^{\alpha\beta}_{,\gamma}$ sono zero, perché generalmente è impossibile scegliere un sistema cartesiano ortogonale di coordinate su di una superficie arbitraria. Scegliamo invece un sistema di coordinate geodetiche. Nel suo polo, i simboli di Christoffel sono nulli e di conseguenza sono pure nulle le derivate parziali di $a_{\alpha\beta}$. Le derivate parziali del determinante a sono perciò nulle nel polo, e cioè $\varepsilon_{\alpha\beta,\gamma}$ e $\varepsilon^{\alpha\beta}_{,\gamma}$ sono qui ambedue zero. Ne consegue immediatamente che questi tensori sono nulli in ogni punto della superficie e in tutti i sistemi di coordinate. Perciò i tensori superficiali di permutazione si comportano come costanti rispetto alla derivazione covariante superficiale e alla derivazione intrinseca.

Esercizio. Dimostrare che le condizioni affinché le curve u^1 e le curve u^2 siano geodetiche sono $\left\{ {2 \atop 11} \right\} = 0$ e $\left\{ {1 \atop 22} \right\} = 0$, rispettivamente. Semplificare queste condizioni per il caso che il sistema di coordinate sia curvilineo ortogonale.

45. Curvatura geodetica. Al n. 40 abbiamo stabilito alcune proprietà differenziali delle curve nello spazio. Considereremo ora, allo stesso fine, curve appartenenti a una superficie. La curva sia data dalle equazioni $u^\alpha = u^\alpha(s)$, dove s è, al solito, l'ascissa curvilinea lungo la curva. Il vettore unitario superficiale tangente alla curva è, come sappiamo,

$$t^\alpha = \frac{du^\alpha}{ds}. \tag{45.1}$$

Poiché t^α è un vettore unitario, abbiamo $a_{\alpha\beta} t^\alpha t^\beta = 1$ e la derivazione intrinseca dà $a_{\alpha\beta} t^\alpha \dfrac{\delta t^\beta}{\delta s} = 0$. Ciò dimostra che $\dfrac{\delta t^\alpha}{\delta s}$ è un vettore superficiale ortogonale al vettore tangente t^α. Indichiamo il vettore unitario nella direzione di $\dfrac{\delta t^\alpha}{\delta s}$ con n^α. Allora

$$\frac{\delta t^\alpha}{\delta s} = \sigma n^\alpha \tag{45.2}$$

dove σ è un invariante chiamato **curvatura geodetica** della curva. Diciamo anche che n^α è il vettore unitario superficiale **normale** alla curva, e scegliamo la sua direzione in modo che la rotazione da t^α a n^α sia positiva. Perciò

$$\varepsilon_{\alpha\beta} t^\alpha n^\beta = 1,$$

e le equazioni (45.2) determinano σ univocamente sia in segno che in grandezza. È ora chiaro dalla (43.3) e dal n. 17 che

$$n^\beta = + \varepsilon^{\alpha\beta} t_\alpha$$

e

$$t^\beta = - \varepsilon^{\alpha\beta} n_\alpha.$$

La derivazione intrinseca della prima equazione dà

$$\frac{\delta n^\beta}{\delta s} = \varepsilon^{\alpha\beta} \frac{\delta t_\alpha}{\delta s} = \sigma \varepsilon^{\alpha\beta} n_\alpha = - \sigma t^\beta.$$

Combinando questa con la (45.2) otteniamo le **relazioni superficiali di Frénet** per una curva:

$$\frac{\delta t^\alpha}{\delta s} = \sigma n^\alpha; \quad \frac{\delta n^\alpha}{\delta s} = - \sigma t^\alpha. \tag{45.3}$$

Sebbene t^α sia lo stesso vettore che T^i, le loro componenti sono legate dalla relazione $T^i = x^i_\alpha t^\alpha$. È importante notare che n^α non è in generale nè la normale principale N^i, né la binormale B^i; essa giace comunque nel piano normale alla curva determinata da N^i e B^i.

Lungo una geodetica della superficie si ha $\delta t^\alpha/\delta s = 0$ e quindi $\sigma = 0$. Inversamente, se $\sigma = 0$ si ha $\delta t^\alpha/\delta s = 0$, e la curva è così una geodetica. Perciò, condizione necessaria e sufficiente affinché una curva sia una geodetica è che la curvatura geodetica sia zero.

Esercizio. Dimostrare che le curvature geodetiche delle curve coordinate sono

$$\sigma_{(1)} = \sqrt{\frac{a}{(a_{11})^3}} \left\{ \begin{matrix} 2 \\ 11 \end{matrix} \right\}, \quad \sigma_{(2)} = - \sqrt{\frac{a}{(a_{22})^3}} \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 22 \end{matrix} \right\}.$$

46. Vettore normale. Vogliamo trovare ora una espressione per il vettore normale unitario ξ^i nel generico punto di una superficie. Scegliamo il suo orientamento in modo che la curva u^1, la curva u^2, e la normale in quel punto, formino un sistema levogiro. I vettori superficiali unitari tangenti alle curve coordinate, sono rispettivamente $\frac{1}{\sqrt{a_{11}}}\,\delta_1^\alpha$ e $\frac{1}{\sqrt{a_{22}}}\,\delta_2^\alpha$, e le componenti spaziali corrispondenti sono $\frac{1}{\sqrt{a_{11}}}\,x_\alpha^i\,\delta_1^\alpha$ e $\frac{1}{\sqrt{a_{22}}}\,x_\alpha^i\,\delta_2^\alpha$, cioè $\frac{1}{a_{11}}\,x_1^i$ e $\frac{1}{\sqrt{a_{22}}}\,x_2^i$.

In virtù delle (43.4) e della forma covariante della (39.1) si ha

$$\sqrt{\frac{a}{a_{11}a_{22}}}\,\xi_i = \varepsilon_{ijk}\,\frac{1}{\sqrt{a_{11}a_{22}}}\,x_1^j\,x_2^k\,,$$

cioè

$$\xi_i = \frac{1}{\sqrt{a}}\,\varepsilon_{ijk}x_1^j\,x_2^k. \tag{46.1}$$

Non è chiaro che ξ_i sia un vettore covariante per la presenza di $\sqrt{a}$ in questa equazione. Peraltro la forma del vettore si vede chiaramente dall'equazione equivalente

$$\xi_i = \frac{1}{2}\,\varepsilon^{\alpha\beta}\varepsilon_{ijk}x_\alpha^j x_\beta^k\,. \tag{46.2}$$

A fini di calcolo è più adatta la (46.1), che può subito essere scritta in forma di determinante; a scopi teorici è invece preferibile la (46.2). Poiché il vettore ξ_i non giace sulla superficie, non c'è il corrispondente vettore superficiale ξ_α. Avremo spesso bisogno dell'importante equazione

$$g_{ij}\xi^i x_\beta^i = 0, \tag{46.3}$$

la quale esprime che la normale ξ^i è ortogonale al vettore superficiale x_β^i. Questa equazione è anche una conseguenza immediata dalla (46.1).

Esercizio. Si consideri la superficie rigata σ costituita dalle rette tangenti a una curva, o superficie circoscritta alla curva. Si dimostri che le normali a σ in tutti i punti di una sua generatrice g sono tutte parallele alla binormale alla curva nel punto di contatto con g.

47. Derivate tensoriali di tensori. Nella teoria delle superfici si ha a che fare con tensori che possiedono indici latini e greci, per esempio x^i_α. Tutti questi tensori in tale teoria saranno controvarianti rispetto allo spazio, ma covarianti rispetto alla superficie. Possiamo quindi scegliere A^i_α come un tensore tipico. Quando cambiamo ambedue i sistemi coordinati, nello spazio e sulla superficie, la legge di trasformazione è

$$\bar{A}^i_\alpha = A^j_\beta \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j} \frac{\partial u^\beta}{\partial \bar{u}^\alpha}.$$

Ci chiediamo ora: quali tensori possono essere costruiti mediante derivazione? Seguiremo qui strettamente il n. 30. Se il nostro spazio è euclideo, il concetto di parallelismo in esso non dipende dalla scelta di una curva. Di conseguenza si sceglie nello spazio un campo vettoriale parallelo arbitrario X_i. Sulla superficie si prende un campo vettoriale parallelo arbitrario Y^α lungo la curva C il cui parametro è t. Quindi

$$\frac{dX_i}{dt} - \left\{ {j \atop ik} \right\} X_j \frac{dx^k}{dt} = 0$$

e

$$\frac{dY^\alpha}{dt} + \left\{ {\alpha \atop \beta\gamma} \right\} Y^\beta \frac{du^\gamma}{dt} = 0.$$

Si formi l'invariante $A^i_\alpha X_i Y^\mu$. Derivando e tenendo conto delle equazioni del parallelismo, si ha

$$\frac{d}{dt}[A^i_\alpha X_i Y^\alpha] = \frac{dA^i_\alpha}{dt} X_i Y^\alpha +$$

$$+ A^i_\alpha \left\{ {j \atop ik} \right\} X_j \frac{dx^k}{dt} Y^\alpha - A^i_\alpha X_i \left\{ {\alpha \atop \beta\gamma} \right\} Y^\beta \frac{du^\gamma}{dt},$$

cioè, eseguendo un opportuno cambiamento di indici saturati:

$$\frac{d}{dt}[A^i_\alpha X_i Y^\alpha] = \left[\frac{\partial A^i_\alpha}{\partial u^\beta} + \left\{ {i \atop jk} \right\} A^j_\alpha x^k_\beta - \left\{ {\varepsilon \atop \alpha\beta} \right\} A^i_\varepsilon \right] \frac{du^\beta}{dt} X_i Y^\alpha.$$

Applicando ora la legge del quoziente, vediamo che l'espressione in parentesi quadra, è un tensore, che chiameremo **derivata tensoriale** di A^i_α rispetto a u^β e indicheremo con la notazione « a punto e virgola »

$$A^i_{\alpha;\beta} \equiv \frac{\partial A^i_\alpha}{\partial u^\beta} + \left\{ {i \atop jk} \right\} A^i_\alpha x^k_\beta - \left\{ {\varepsilon \atop \alpha\beta} \right\} A^i_\varepsilon. \tag{47.1}$$

È possibile scegliere un sistema cartesiano ortogonale nello spazio e un sistema geodetico sulla superficie; allora nel polo, le derivate tensoriali divengono le derivate parziali. In conseguenza le leggi di derivazione tensoriale sono le stesse che si applicano alle derivate covarianti.

Dobbiamo ora estendere il concetto di derivazione tensoriale ulteriormente ai tensori nello spazio e ai tensori superficiali. È chiaro che le derivate tensoriali di tensori superficiali sono identiche alle loro derivate covarianti. Seguendo il metodo di questo paragrafo, vediamo che la derivata tensoriale di un tensore nello spazio rispetto ad u^α è il tensore ottenuto mediante il prodotto interno della sua derivata covariante, fatta rispetto a x^l, per il tensore x^l_α. Per esempio $A^{ij}_{;\alpha} = A^{ij}_{,k} x^k_\alpha$. Perciò le derivate tensoriali di g_{ij}, g^{ij}, δ^j_i, ε_{ijk}, ε^{ijk}, $a_{\alpha\beta}$, $a^{\alpha\beta}$, δ^α_β, $\varepsilon_{\alpha\beta}$, e $\varepsilon^{\alpha\beta}$ sono tutte zero. Cioè questi tensori possono essere trattati come costanti rispetto alla derivazione tensoriale.

48. Seconda forma fondamentale. Per derivazione tensoriale si ha

$$x^i_{\alpha;\beta} = \frac{\partial^2 x^i}{\partial u^\alpha \partial u^\beta} + \left\{ {i \atop jk} \right\} x^j_\alpha x^k_\beta - \left\{ {\gamma \atop \alpha\beta} \right\} x^i_\gamma, \tag{48.1}$$

relazione che dimostra essere $x^i_{\alpha;\beta}$ simmetrica in α e β. Cioè $x^i_{\alpha;\beta} = x^i_{\beta;\alpha}$. Ora la derivazione tensoriale di (42.2) dà

$$g_{ij}x^i_{\alpha;\gamma}x^j_\beta + g_{ij}x^i_\alpha x^j_{\beta;\gamma} = 0.$$

Sottraiamo questa equazione dalla somma delle due analoghe equazioni ottenute permutando circolarmente α, β e γ. Poiché $x^i_{\alpha;\beta}$ è simmetrico, il risultato è

$$g_{ij}x^i_{\alpha;\beta}x^j_\gamma = 0. \tag{48.2}$$

Questo dimostra che $x^i_{\alpha;\beta}$ è un vettore spaziale controvariante ortogonale a tutti i vettori x^j_γ giacenti sulla superficie. Quindi ha la stessa direzione del vettore normale ξ^i. Devono esistere pertanto quantità $b_{\alpha\beta}$ tali che risulti

$$x^i_{\alpha;\beta} = b_{\alpha\beta}\xi^i. \tag{48.3}$$

Inoltre, ne consegue che le $b_{\alpha\beta}$ formano le componenti di un tensore superficiale covariante simmetrico. Le equazioni (48.3) sono conosciute come **formule di Gauss.** Poiché ξ^i è un vettore unitario, il prodotto interno di (48.3) per ξ_i, ove si tenga conto della (46.2), dà

$$b_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\,\varepsilon^{\gamma\delta}\varepsilon_{ijk}x^i_{\alpha;\beta}x^j_\gamma x^k_\delta = \frac{1}{\sqrt{a}}\,\varepsilon_{ijk}x^i_{\alpha;\beta}x^j_1 x^k_2\,. \tag{48.4}$$

La forma quadratica

$$b_{\alpha\beta}du^\alpha du^\beta \tag{48.5}$$

è detta **seconda forma fondamentale** della superficie. Ora è possibile costruire l'invariante

$$H = \frac{1}{2}\,a^{\alpha\beta}b_{\alpha\beta}, \tag{48.6}$$

che è detto **curvatura media** della superficie.

Esercizio. Se le coordinate spaziali sono cartesiane ortogonali, dimostrare che

$$b_{\alpha\beta} = \frac{1}{\sqrt{a}} \varepsilon_{ijk} \frac{\partial^2 x^i}{\partial u^\alpha \partial u^\beta} x^j_1 x^k_2 .$$

49. Terza forma fondamentale. La derivazione tensoriale dell'identità $g_{ij}\xi^i\xi^j = 1$ fornisce la relazione $g_{ij}\xi^i\xi^j_{;\,\alpha} = 0$. Cioè, $\xi^j_{;\,\alpha}$ è un vettore spaziale controvariante ortogonale al vettore normale. Perciò esso giace sulla superficie, e di conseguenza esistono delle quantità η^β_α tali che

$$\xi^i_{;\,\alpha} = \eta^\beta_\alpha x^i_\beta. \tag{49.1}$$

La legge del quoziente stabilisce allora che η^β_α forma un tensore superficiale misto. Derivando ora tensorialmente la (46.3) otteniamo

$$g_{ij}\xi^i_{;\,\alpha}x^j_\beta + g_{ij}\xi^i x^j_{\beta\,;\,\alpha} = 0,$$

che, tenendo conto delle (49.1) e (48.3), si riduce a

$$g_{ij}\eta^\gamma_\alpha x^i_\gamma x^j_\beta + g_{ij}\xi^i b_{\alpha\beta}\xi^j = 0.$$

Applichiamo la (42.2) ed il risultato è

$$b_{\alpha\beta} = -\, a_{\beta\gamma}\eta^\gamma_\alpha. \tag{49.2}$$

Il prodotto interno per $a^{\beta\varepsilon}$ dà

$$\eta^\varepsilon_\alpha = -\, a^{\beta\varepsilon} b_{\alpha\beta}; \tag{49.3}$$

e possiamo così riscrivere la (49.1) nella forma

$$\xi^i_{;\,\alpha} = -\, a^{\gamma\beta} b_{\alpha\gamma} x^i_\beta. \tag{49.4}$$

Queste equazioni sono conosciute come **formule di Weingarten.**

Introduciamo il tensore superficiale simmetrico

$$c_{\alpha\beta} = g_{ij}\xi^i_{;\,\alpha}\xi^j_{;\,\beta} \tag{49.5}$$

e formiamo da esso la forma quadratica $c_{\alpha\beta}du^\alpha du^\beta$, che è detta **terza forma fondamentale** della superficie.

Esercizio. Dimostrare che $c_{\alpha\beta} = a^{\gamma\delta}\, b_{\alpha\gamma}b_{\beta\delta}$.

50. Equazioni di Gauss-Codazzi. Siamo ora in condizioni di trovare le formule centrali della teoria delle superfici. Per il momento supponiamo che le coordinate spaziali siano cartesiane ortogonali, e che le coordinate sulla superficie siano geodetiche. La derivazione tensoriale di (48.1) dà, nel polo,

$$x^i_{\alpha;\beta\gamma} = \frac{\partial^3 x^i}{\partial u^\alpha \partial u^\beta \partial u^\gamma} - \frac{\partial}{\partial u^\gamma}\left\{\begin{matrix}\sigma\\ \alpha\beta\end{matrix}\right\} x^i_\sigma .$$

Così

$$x^i_{\alpha;\beta\gamma} - x^i_{\alpha;\gamma\beta} = \left[\frac{\partial}{\partial u^\beta}\left\{\begin{matrix}\sigma\\ \alpha\gamma\end{matrix}\right\} - \frac{\partial}{\partial u^\gamma}\left\{\begin{matrix}\sigma\\ \alpha\beta\end{matrix}\right\}\right] x^i_\sigma .$$

L'espressione in parentesi quadra è il tensore superficiale di Riemann-Christoffel $R^\sigma_{.\alpha\beta\gamma}$ nel polo. Abbiamo così la equazione tensoriale

$$x^i_{\alpha;\beta\gamma} - x^i_{\alpha;\gamma\beta} = R^\sigma_{.\alpha\beta\gamma} x^i_\sigma \tag{50.1}$$

che deve essere verificata in ogni punto della superficie e in tutti i sistemi di coordinate.

Sostituendo dalla (49.4) nella derivata tensoriale della (48.3) otteniamo

$$x^i_{\alpha;\beta\gamma} = b_{\alpha\beta;\gamma}\xi^i - a^{\varepsilon\sigma} b_{\alpha\beta} b_{\gamma\varepsilon} x^i_\sigma .$$

Possiamo di conseguenza scrivere la (50.1) nella forma

$$(b_{\alpha\beta;\gamma} - b_{\alpha\gamma;\beta})\,\xi^i - a^{\varepsilon\sigma}(b_{\alpha\beta}b_{\gamma\varepsilon} - b_{\alpha\gamma}b_{\beta\varepsilon})x^i_\sigma = R^\sigma_{.\alpha\beta\gamma}x^i_\sigma .$$

Il prodotto interno per ξ_i e $g_{ij}x^j_\rho$, in virtù delle (42.2) e (46.3), dà rispettivamente le equazioni

$$b_{\alpha\beta;\gamma} - b_{\alpha\gamma;\beta} = 0 \tag{50.2}$$

$$R_{\rho\alpha\beta\gamma} = b_{\alpha\gamma}b_{\rho\beta} - b_{\alpha\beta}b_{\rho\gamma} . \tag{50.3}$$

Il lettore verifichi che la (50.2) consiste di sole due equazioni, differenziali alle derivate parziali, indipendenti. Esse sono chiamate **equazioni di Codazzi.** Poiché in due dimensioni c'è soltanto una componente distinta del tensore di curvatura, le (50.3) si riducono alla sola equazione

$$R_{1212} = b_{11}b_{22} - (b_{12})^2 \tag{50.4}$$

che è detta **equazione di Gauss.** Per mezzo di (35.2) possiamo scrivere questa equazione nella forma

$$K = \frac{b}{a}, \tag{50.5}$$

dove b è il determinante formato da $b_{\alpha\beta}$ e K è la curvatura riemanniana della superficie. Su una superficie è più usuale chiamare K **curvatura totale** o **di Gauss.**

Si può dimostrare che una superficie è univocamente determinata, a meno di una traslazione o rotazione nello spazio, quando sono date la prima e la seconda forma fondamentale.

Questo teorema può essere formulato precisamente come segue: se $a_{\alpha\beta}$ e $b_{\alpha\beta}$ sono funzioni date di u^1 e u^2, esiste una superficie $x^i = x^i(u^\alpha)$, univocamente determinata tranne che per la sua posizione nello spazio, che ha $a_{\alpha\beta}du^\alpha du^\beta$ e $b_{\alpha\beta}du^\alpha du^\beta$ rispettivamente come sue prima e seconda forma fondamentale, purché $a_{\alpha\beta}du^\alpha du^\beta$ sia definita positiva e $a_{\alpha\beta}$, $b_{\alpha\beta}$ soddisfino le equazioni di Gauss-Codazzi.

Esercizio. Dimostrare che $c_{\alpha\beta} = 2Hb_{\alpha\beta} - Ka_{\alpha\beta}$.

51. Curvatura normale - Linee asintotiche. Si consideri su una superficie, la curva $u^\alpha = u^\alpha(s)$, dove s è l'ascissa curvilinea. Le equazioni della curva nello spazio saranno $x^i = x^i(s)$. Allora i vettori spaziali T^i, N^i e B^i ed i vettori superficiali t^α e n^α, soddisfano le formule di Frénet (40.5) e (45.3) in qualsiasi punto della curva. I vettori tangenti

T^i e t^α sono legati dalla relazione $T^i = t^\alpha x^\alpha_i$. La derivazione intrinseca, in virtù della (48.3), dà

$$\begin{aligned}\frac{\delta T^i}{\delta s} &= T^i_{,j}\frac{dx^j}{ds} = T^i_{,j}x^j_\beta\frac{du^\beta}{ds} = T^i_{;\beta}\frac{du^\beta}{ds}\\ &= t^\alpha_{;\beta}x^i_\alpha\frac{du^\beta}{ds} + t^\alpha x^i_{\alpha;\beta}\frac{du^\beta}{ds}\\ &= \frac{\delta t^\alpha}{\delta s}x^i_\alpha + b_{\alpha\beta}t^\alpha t^\beta\xi^i.\end{aligned}$$

Applicando le formule di Frénet, si ha

$$\varkappa N^i = \sigma n^\alpha x^i_\alpha + b_{\alpha\beta}t^\alpha t^\beta \xi^i,$$

o, indicando con n^i le componenti spaziali di n^α,

$$\varkappa N^i = \sigma n^i + b_{\alpha\beta}t^\alpha t^\beta\xi^i. \tag{51.1}$$

Introduciamo l'angolo θ tra la normale principale N^i e la normale alla superficie ξ^i. Il prodotto interno di (51.1) per ξ_i dà

$$\varkappa \cos\theta = b_{\alpha\beta}t^\alpha t^\beta, \tag{51.2}$$

in quanto ξ_i è ortogonale al vettore n^i che giace sulla superficie. L'invariante $b_{\alpha\beta}t^\alpha t^\beta$ è lo stesso per tutte le curve che hanno lo stesso vettore tangente t^α in un punto sulla superficie. Di conseguenza si ha il **teorema di Meusnier:** « per tutte le curve su una superficie che hanno lo stesso vettore tangente, la quantità $\varkappa\cos\theta$ è costante ». Questa quantità è chiamata **curvatura normale** nel punto ed è indicata con $\varkappa_{(n)}$. Quindi

$$\varkappa_{(n)} = b_{\alpha\beta}t^\alpha t^\beta = \frac{b_{\alpha\beta}du^\alpha du^\beta}{a_{\alpha\beta}du^\alpha du^\beta}. \tag{51.3}$$

Se scegliamo una sezione piana passante per la normale alla superficie, allora $\theta = 0$ oppure $\theta = \pi$. Cioè $\varkappa_{(n)} = \pm\varkappa$. Così la curvatura normale in ogni direzione è uguale in grandezza alla curvatura della sezione normale piana della superficie in quella direzione.

Lungo una geodetica si ha $\sigma = 0$, perciò le equazioni (51.1) si riducono a $\varkappa N^i = b_{\alpha\beta} t^\alpha t^\beta \xi^i$. Così si ha o $\varkappa = 0$ o $N^i = \pm \xi^i$. Deduciamo che una geodetica su una superficie è o una retta o è una curva la cui normale principale ha la stessa direzione della normale alla superficie in ogni punto. Inversamente, se $N^i = \pm \xi^i$, il prodotto interno di (51.1) per n_i dà $\sigma = 0$: cioè, la curva è una geodetica.

Le direzioni in un punto di una superficie che soddisfano l'equazione $b_{\alpha\beta} du^\alpha du^\beta = 0$ sono dette **direzioni asintotiche.** Se in tutti i punti di una curva le direzioni tangenti sono asintotiche, la curva è detta **linea asintotica.** Le linee asintotiche su una superficie sono date da $b_{\alpha\beta} du^\alpha du^\beta = 0$. Abbiamo quindi lungo una linea asintotica $\varkappa N^i = \sigma n^i$. Ne risulta, poiché N^i e n^i sono ambedue vettori unitari, che o $\varkappa = \sigma = 0$, oppure che la curvatura e la curvatura geodetica di una linea asintotica sono uguali in grandezza e che la normale principale giace sulla superficie. Di conseguenza, la binormale ad una linea asintotica, che non sia una retta, ha la stessa direzione della normale alla superficie. Vale anche l'inverso.

Esercizio. Dimostrare la **formula di Enneper** secondo la quale la torsione τ di una linea asintotica è $\pm \sqrt{-K}$, dove K è la curvatura gaussiana della superficie.

52. Curvature principali - Linee di curvatura. La curvatura normale $\varkappa_{(n)}$ di una superficie nella direzione t è data da $\varkappa_{(n)} = b_{\alpha\beta} t^\alpha t^\beta$, dove il vettore tangente soddisfa alla condizione $a_{\alpha\beta} t^\alpha t^\beta = 1$. I valori massimo e minimo di $\varkappa_{(n)}$ possono essere quindi determinati con il metodo usato al n. 19. Essi corrispondono alle direzioni principali determinate da $b_{\alpha\beta}$ e sono dati dalle radici dell'equazione $| b_{\alpha\beta} - \lambda a_{\alpha\beta} | = 0$, che si riduce in virtù della (50.5) e della (48.6) a

$$\lambda^2 - 2H\lambda + K = 0. \tag{52.1}$$

Le radici $\varkappa_{(1)}$ e $\varkappa_{(2)}$ di questa equazione, sono dette **curvature principali** della superficie nel punto considerato.

Le direzioni principali $t^\alpha_{(1)}$ e $t^\alpha_{(2)}$, corrispondenti alle curvature principali nel punto, soddisfano rispettivamente alle condizioni

$$(b_{\alpha\beta} - \varkappa_{(1)}\, a_{\alpha\beta})\, t^\beta_{(1)} = 0,$$

$$(b_{\alpha\beta} - \varkappa_{(2)}\, a_{\alpha\beta})\, t^\beta_{(2)} = 0.$$

Un punto in cui $\varkappa_{(1)} = \varkappa_{(2)}$ è detto **ombelico**. In tutti gli altri punti, quanto abbiamo stabilito al n. 19 ci dice che $t^\alpha_{(1)}$ e $t^\alpha_{(2)}$ sono ortogonali l'uno all'altro. Una curva della superficie che abbia in ogni suo punto direzione coincidente con una delle direzioni principali è detta **linea di curvatura**.

In un ombelico, l'equazione (52.1) ha le radici coincidenti, cioè $H^2 = K$, e il lettore può verificare che questo risultato può essere scritto

$$4a(a_{11}b_{12} - a_{12}b_{11})^2 +$$
$$+ [a_{11}(a_{11}b_{22} - a_{22}b_{11}) - 2a_{12}(a_{11}b_{12} - a_{12}b_{11})]^2 = 0.$$

Poiché $a_{\alpha\beta}du^\alpha du^\beta$ è definita positiva, a è positivo, se ne ricava che

$$a_{11}b_{12} - a_{12}b_{11} = a_{11}b_{22} - a_{22}b_{11} = 0,$$

e così

$$\frac{b_{11}}{a_{11}} = \frac{b_{12}}{a_{12}} = \frac{b_{22}}{a_{22}}.$$

L'equazione (51.3) mostra allora che $\varkappa_{(n)}$ è indipendente dalla direzione du^α/ds. Cioè, in un ombelico, la curvatura normale è la stessa in ogni direzione.

Esercizio 1. Dimostrare che le linee di curvatura sulla superficie sono date da $\varepsilon^{\gamma\delta} a_{\alpha\gamma} b_{\beta\delta} du^\alpha du^\beta = 0$.

Esercizio 2. Se le curve coordinate sono linee di curvatura, dimostrare che si ha $a_{12} = b_{12} = 0$, e viceversa.

Esercizio 3. Dimostrare che una superficie, tutti i punti della quale siano ombelichi, è una sfera o un piano.

CAPITOLO VII

TENSORI CARTESIANI - ELASTICITÀ

53. Trasformazioni ortogonali. Scopo di questo capitolo, è di presentare la teoria dell'elasticità. Ci limiteremo pertanto a considerare lo spazio euclideo a tre dimensioni, scegliendo in esso un sistema levogiro di coordinate cartesiane ortogonali, che indicheremo con y_i, dove gli indici latini variano naturalmente da 1 a 3. L'elemento lineare ds è dato quindi da

$$ds^2 = dy_i dy_i = \delta_{ij} dy_i dy_j, \tag{53.1}$$

dove δ_{ij} è la delta di Kronecker.

Le equazioni lineari, [si confronti (6.3)],

$$\bar{y}_i = a_{ij} y_j + b_i, \tag{53.2}$$

dove le b_i sono tre costanti, e le a_{ij} nove altre costanti, determinano una trasformazione in un nuovo sistema di coordinate $\bar{y}_i$. Condizioni necessarie e sufficienti perché le $\bar{y}_i$ costituiscano, esse pure, un sistema di coordinate cartesiane ortogonali è che sia

$$ds^2 = d\bar{y}_i d\bar{y}_i = a_{ij} a_{ik} dy_j dy_k = \delta_{jk} dy_j dy_k,$$

cioè,

$$(a_{ij} a_{ik} - \delta_{jk})\, dy_j dy_k = 0$$

per tutti i valori di dy_j, e quindi

$$a_{ij} a_{ik} = \delta_{jk}. \tag{53.3}$$

Il prodotto interno di (53.2) per a_{ik} dà la soluzione

$$y_k = a_{ik}\bar{y}_i - a_{ik}b_i. \tag{53.4}$$

Così

$$\frac{\partial \bar{y}_i}{\partial y_j} = \frac{\partial y_j}{\partial \bar{y}_i} = a_{ij}. \tag{53.5}$$

In virtù di queste equazioni, esaminando la (9.1) vediamo che la distinzione tra covarianza e controvarianza è scomparsa. In conformità scriveremo tutti gli indici come sottoscritti a condizione che si considerino soltanto trasformazioni del tipo (53.2) soggette alle (53.3). Abbiamo già anticipato questo usando i simboli y_i, δ_{ij} e a_{ij}. Potremmo però voler adottare qualche volta un sistema di coordinate curvilinee, come le coordinate polari sferiche. È quindi necessario reintrodurre la distinzione tra covarianza e controvarianza. Essa sarà indicata da un ritorno alle coordinate x^i.

La trasformazione (53.2) è equivalente alla combinazione delle due trasformazioni $\bar{y}_i = y_i' + b_i$ e $y_i' = a_{ij}y_j$. La trasformazione $\bar{y}_i = y_i' + b_i$ definisce una traslazione ai nuovi assi paralleli. La trasformazione

$$y_i' = a_{ij}y_j \tag{53.6}$$

soggetta alle sei condizioni (53.3), si dice che definisce una **trasformazione ortogonale**. Segue da (53.3) che il determinante $|a_{ij}|$ di una trasformazione ortogonale è uguale a $+1$ o a -1, e in corrispondenza diciamo che la (53.6) definisce rispettivamente una trasformazione ortogonale positiva o negativa. È noto che gli assi y_i' formano un sistema levogiro o destrogiro, se la trasformazione ortogonale è rispettivamente positiva o negativa. Inoltre una trasformazione ortogonale positiva definisce una rotazione degli assi intorno all'origine.

Si ottiene un insieme di equazioni in alternativa alle (53.3), considerando

$$ds^2 = dy_i dy_i = a_{ji} a_{ki} d\bar{y}_j d\bar{y}_k = \delta_{jk} d\bar{y}_j d\bar{y}_k,$$

da cui si deduce che

$$a_{ji} a_{ki} = \delta_{jk}. \tag{53.7}$$

Esercizio. Dimostrare che nella rotazione di assi definita dalla trasformazione ortogonale positiva (53.6), a_{ij} è il coseno dell'angolo tra l'asse y_i' e l'asse y_i. Le componenti a_{ij} sono perciò i coseni di direzione del sistema y_i' rispetto al sistema y_i.

54. Rotazioni. Le equazioni (53.2) potrebbero essere interpretate da un altro punto di vista. Potremmo dire che esse trasformano il punto P, le cui coordinate sono y_i, nel punto $\bar{P}$, le cui coordinate sono $\bar{y}_i$, riferite allo stesso sistema di assi cartesiani ortogonali. Chiamiamo quindi la (53.2) una **trasformazione affine** (1).

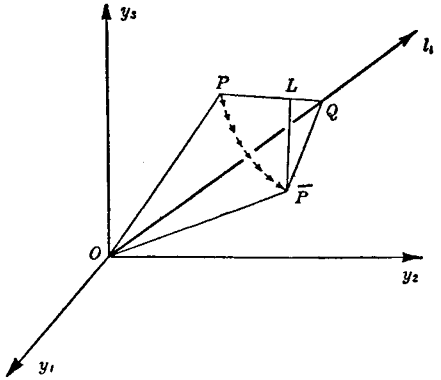
---

(1) **Geometria affine** – Conformemente al « Programma di Erlangen » dovuto a Klein [F. Klein, *Math. Ann.* Vol. 43 (1893)], una geometria comprende un sistema di definizioni e teoremi che esprimono proprietà invarianti rispetto ad un dato gruppo di trasformazioni. Per esempio, se il gruppo di trasformazioni è quello costituito da tutti i moti rigidi dei corpi, cioè traslazioni e rotazioni, allora la geometria è detta metrica. Questa è la geometria di Euclide, tranne i teoremi di similitudine, e i suoi concetti più importanti sono quelli di distanza e di angolo.

Esaminiamo ora la geometria affine, definita dal gruppo di trasformazioni (53.2). Si supponga che A_i sia il vettore che unisce il punto di coordinate z_i al punto di coordinate y_i. Allora $A_i = y_i - z_i$, e immediatamente da (53.2) si ha che la legge di trasformazione dei vettori è $\bar{A}_i = a_{ij} A_j$. Scegliamo ora due vettori paralleli A_i e B_i. Le condizioni cui A_i e B_i devono allora soddisfare sono, come si sa, $A_1/B_1 = A_2/B_2 = A_3/B_3$. Ma ciascuna di queste frazioni è uguale a $(a_{11}A_1 + a_{12}A_2 + a_{13}A_3)/(a_{11}B_1 + a_{12}B_2 + a_{13}B_3)$ e questo rapporto coincide sia con $\bar{A}_1/\bar{B}_1$, sia con $\bar{A}_2/\bar{B}_2$, sia con $\bar{A}_3/\bar{B}_3$. Abbiamo così $\bar{A}_1/\bar{B}_1 = \bar{A}_2/\bar{B}_2 = \bar{A}_3/\bar{B}_3$. Quindi il « parallelismo di vettori » è invariante nella geometria affine. Vediamo inoltre da (53.2) che ogni punto al finito si trasforma in un punto al finito. Perciò il piano

Se si impongono le condizioni (53.3) e la condizione $| a_{ij} | = 1$, si ha il più generale moto rigido di un corpo, consistente in una rotazione seguita da una traslazione.

Adesso vogliamo ottenere la trasformazione ortogonale che rappresenta una rotazione levogira di ampiezza ψ intorno ad una retta passante per l'origine e i cui coseni di direzione sono l_i. Una rotazione siffatta è, in sostanza, quella di un cavatappi levogiro il cui asse si muova lungo la retta per l'origine di direzione l_i, mentre il cavatappi medesimo ruota attorno a tale asse sino a descrivere un angolo ψ. Usando notazioni vettoriali si ha (vedi fig.):



$$\overrightarrow{O\bar{P}} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PL} + \overrightarrow{L\bar{P}},$$

dove Q è il piede della perpendicolare condotta da P alla retta passante per l'origine, di coseni direttori l_i, l'angolo

---

all'infinito è invariante e potremo così distinguere tra una quadrica non a centro e una quadrica a centro a seconda che il piano all'infinito tocca o non tocca la quadrica.

Comunque non possiamo definire l'angolo o la distanza nella geometria affine, perché essi non sono invarianti rispetto al gruppo affine di trasformazioni (53.2).

$P Q \bar{P} = \psi$, $QP = Q\bar{P}$, il piano $PQ\bar{P}$ è ortogonale a l_i e $\bar{P}L$ è la perpendicolare da $\bar{P}$ a PQ. Poiché $\overrightarrow{OP} = y_i$, abbiamo $\overrightarrow{OQ} = l_i l_k y_k$ e così $\overrightarrow{PQ} = l_i l_k y_k - y_i$. Risulta essere, pertanto, $\overrightarrow{PL} = (1 - \cos\psi)\,\overrightarrow{PQ} = (1 - \cos\psi)\,(l_i l_k y_k - y_i)$. Inoltre $\overrightarrow{L\bar{P}}$ è ortogonale a $\overrightarrow{PQ}$ e l_i in guisa tale che $\overrightarrow{PQ}$, l_i, $\overrightarrow{L\bar{P}}$ formano un sistema levogiro. Poiché per la (39.1) il vettore unità nella direzione $\overrightarrow{L\bar{P}}$ è dato da $e_{ijk}(l_j l_m y_m - y_j)\, l_k/PQ =$ $= - e_{ijk} y_j l_k/PQ$, si ha $\overrightarrow{L\bar{P}} = PQ \operatorname{sen}\psi\,(- e_{ijk} y_j l_k/PQ) =$ $= e_{ijk} l_j y_k \operatorname{sen}\psi$. Abbiamo quindi

$$\bar{y}_i = y_i + (1 - \cos\psi)\,(l_i l_k y_k - y_i) + \operatorname{sen}\psi\, e_{ijk} l_j y_k,$$

che può essere anche scritta

$$\bar{y}_i = a_{ik} y_k, \tag{54.1}$$

dove

$$a_{ik} = \cos\psi\,\delta_{ik} + (1 - \cos\psi)\, l_i l_k + \operatorname{sen}\psi\, e_{ijk} l_j. \tag{54.2}$$

Nella teoria dell'elasticità saremo particolarmente interessati alle rotazioni infinitesime, nel qual caso $\cos\psi \cong 1$ e $\operatorname{sen}\psi \cong \psi$. La rotazione infinitesima è allora rappresentata da

$$\bar{y}_i = y_i + \psi e_{ijk} l_j y_k,$$

cioè,

$$\bar{y}_i = y_i + s_{ik} y_k, \tag{54.3}$$

dove

$$s_{ik} = \psi e_{ijk} l_j. \tag{54.4}$$

È chiaro che s_{ik} è antisimmetrico. Inversamente, consideriamo la (54.3) supponendo s_{ik} antisimmetrico. In tal caso le (54.4) comprendono soltanto tre equazioni nelle tre incognite l_i, le cui soluzioni sono $l_1 = - s_{23}/\psi$, $l_2 = - s_{31}/\psi$

e $l_3 = -s_{12}/\psi$. Perciò le equazioni (54.3) rappresentano sempre una rotazione infinitesima se ψ è infinitesimo e s_{ik} è antisimmetrico.

Esercizio. Calcolare a_{ik} corrispondente a una rotazione di 90^o intorno all'asse y_3.

55. Tensori cartesiani. Un **tensore cartesiano** di ordine M in uno spazio euclideo tridimensionale, è definito da un insieme di 3^M quantità che si trasformano secondo le equazioni (9.1), quando le coordinate subiscono una trasformazione ortogonale positiva. Questa è una condizione meno rigorosa di quella imposta ad un tensore. Vediamo così che tutti i tensori sono tensori cartesiani, ma un tensore cartesiano non è necessariamente un tensore nel significato usuale del termine. In virtù di (53.5) abbiamo che $A_{k_1k_2\ldots k_M}$ è un tensore cartesiano di ordine M se le componenti trasformate soddisfano alla condizione

$$\bar{A}_{l_1l_2\ldots l_M} = a_{l_1k_1}a_{l_2k_2}\ldots a_{l_Mk_M}A_{k_1k_2\ldots k_M}, \tag{55.1}$$

nel cambiamento delle coordinate con la trasformazione ortogonale positiva $\bar{y}_i = a_{ij}y_j$. Vediamo da (53.6) che le y_i e i loro differenziali dy_i sono vettori cartesiani. Anche la delta di Kronecker è un tensore cartesiano del secondo ordine in quanto, in virtù della (53.7), si ha

$$\bar{\delta}_{ij} = a_{ir}a_{js}\delta_{rs} = a_{ir}a_{jr} = \delta_{ij}.$$

Inoltre deduciamo da (38.2) che il simbolo di permutazione e_{ijk} è un tensore cartesiano del terzo ordine. Così a_{ik} e s_{ik} introdotti nell'ultimo paragrafo, sono tensori cartesiani del secondo ordine.

Il tensore fondamentale dello spazio euclideo è la delta di Kronecker δ_{ij}. Quindi tutti i simboli di Christoffel sono zero e la notazione «virgola» per le derivate covarianti indica ora le usuali derivate parziali, che sono tensori cartesiani.

L'uso di (55.1) invece di (9.1) dimostra chiaramente che la legge del quoziente del n. 12 si applica anche ai tensori cartesiani.

56. Deformazione infinitesima. Consideriamo un corpo che sia deformato sotto l'azione di forze applicate. La particella che era nel punto P, di coordinate y_i in un sistema ortogonale cartesiano, è spostata nel punto $\bar{P}$ di coordinate $y_i + u_i$. Analogamente la particella che era nel punto Q di coordinate z_i è spostata nel punto $\bar{Q}$ di coordinate $z_i + v_i$. Definiamo **estensione** $e_{(PQ)}$ del segmento che unisce i punti non deformati P e Q, la variazione di lunghezza per unità di lunghezza dovuta alla deformazione. Cioè

$$e_{(PQ)} = \frac{\overline{PQ} - PQ}{PQ} = \frac{\overline{PQ}}{PQ} - 1. \tag{56.1}$$

Si ha

$$(PQ)^2 = (y_i - z_i)\,(y_i - z_i),$$

e

$$\begin{aligned}(\overline{PQ})^2 &= (y_i + u_i - z_i - v_i)\,(y_i + u_i - z_i - v_i) = \\ &= (y_i - z_i)\,(y_i - z_i) + 2(y_i - z_i)\,(u_i - v_i) + \\ &\quad + (u_i - v_i)\,(u_i - v_i) = \\ &= (PQ)^2 \left\{ 1 - \frac{2l_i(u_i - v_i)}{PQ} + \frac{(u_i - v_i)\,(u_i - v_i)}{(PQ)^2} \right\}\end{aligned}$$

dove $l_i = (z_i - y_i)/PQ$ sono i coseni di direzione della retta non deformata PQ. Quindi

$$e_{(PQ)} = \left\{ 1 - \frac{2l_i(u_i - v_i)}{PQ} + \frac{(u_i - v_i)\,(u_i - v_i)}{(PQ)^2} \right\}^{\frac{1}{2}} - 1.$$

Limitiamo la nostra attenzione al caso delle deformazioni infinitesime, per le quali si suppone che i vettori spostamento u_i e v_i siano piccoli paragonati a PQ. Trascurando le quantità di ordine superiore al primo, otteniamo

$$e_{(PQ)} = -\frac{l_i(u_i - v_i)}{PQ}.$$

Supponiamo ora che Q sia nelle vicinanze di P, cosicché $y_i - z_i$ sia piccolo. Allora dal teorema di Taylor per una funzione di tre variabili si ha

$$v_i = u_i + (z_j - y_j)\, u_{ij} + \text{termini di ordine superiore in } (z_j - y_j).$$

Trascurando i termini di ordine superiore al primo in $z_i - y_i$, si ha per l'estensione e, in P, nella direzione determinata dal versore l_i l'espressione

$$e = \frac{l_i(z_j - y_j)}{PQ} u_{i,j} = u_{i,j} l_i l_j.$$

Introduciamo il **tensore di deformazione** (cartesiano e simmetrico)

$$e_{ij} = \frac{1}{2}\,(u_{i,j} + u_{j,i}), \tag{56.2}$$

(non si confondano le e_{ij} con i simboli di permutazione $e_{\alpha\beta}$ del capitolo precedente che sono contraddistinti da indici greci), e otteniamo infine la estensione e espressa dalla forma quadratica

$$e = e_{ij} l_i l_j. \tag{56.3}$$

La **dilatazione** o **espansione** θ è definita come la variazione di volume per unità di volume. Cioè

$$\theta = (\Delta\bar{V} - \Delta V)/\Delta V = \Delta\bar{V}/\Delta V - 1, \tag{56.4}$$

dove $\Delta\bar{V}$ denota il volume deformato corrispondente al volume ΔV. Ma abbiamo anche

$$\frac{\Delta\bar{V}}{\Delta V} = \left|\frac{\partial(y_i + u_i)}{\partial(y_j)}\right| = 1 + u_{1,1} + u_{2,2} + u_{3,3} +$$
$$+ \text{termini di ordine superiore.}$$

Così in virtù delle (56.2) e (56.4) si ha

$$\theta = e_{ii}. \tag{56.5}$$

Le componenti del tensore di deformazione non sono interamente arbitrarie. Per provare questo deriviamo le (56.2) due volte ed otteniamo

$$e_{ij,kl} = \frac{1}{2}(u_{i,jkl} + u_{j,ikl}),$$

da cui segue immediatamente

$$e_{ij,kl} + e_{kl,ij} - e_{ik,jl} - e_{jl,ik} = 0. \tag{56.6}$$

Si hanno così 81 di queste **equazioni di compatibilità**. In realtà alcune sono ripetute a causa della simmetria del tensore di deformazione ed altre sono soddisfatte identicamente. Il lettore verifichi che solo sei di queste equazioni sono indipendenti.

Per concludere questo paragrafo, trattiamo alcuni importanti esempi di deformazione.

1) **Dilatazione uniforme.** Consideriamo il vettore spostamento $u_i = cy_i$, dove c è una costante. Abbiamo $e_{ij} = c\delta_{ij}$ e la dilatazione $\theta = 3c$. Così l'estensione in ogni punto è costante in ogni direzione e uguale ad un terzo della dilatazione.

2) **Estensione semplice.** Consideriamo il vettore spostamento $u_i = cl_il_jy_j$ dove c è una costante e l_i un vettore unitario. Abbiamo $u_{i,j} = cl_il_j$ da cui $e_{ij} = cl_il_j$ e $\theta = cl_il_i = c$. Si ha anche $e_{ij}l_il_j = c$ e da questo si deduce che in ogni punto c'è una estensione nella direzione l_i di grandezza uguale alla dilatazione. L'estensione in ogni di-

rezione ortogonale a l_i, come si può facilmente riconoscere, è uguale a zero, Se la costante c è negativa si ha una **contrazione semplice.**

3) **Scorrimento.** Consideriamo il vettore spostamento $u_i = 2cl_i m_j y_j$, dove c è una costante e sia l_i che m_i sono vettori unitari. Un breve calcolo ci dà $e_{ij} = c(l_i m_j + l_j m_i)$ e $\theta = 2cl_i m_i$. Di conseguenza la dilatazione è nulla se le direzioni di l_i e m_i sono ortogonali.

Esercizio. Dimostrare che una estensione semplice lungo una qualsiasi direzione insieme ad una contrazione semplice uguale lungo una direzione ortogonale è equivalente ad uno scorrimento lungo una direzione che biseca l'angolo compreso tra le due direzioni date.

57. Gli sforzi. Le forze che agiscono su di un corpo possono essere sia interne che esterne. Le forze esterne possono consistere sia in forze di massa come la gravità, che agisce su ciascuna particella del corpo, sia in forze di superficie che agiscono sulla superficie esterna del corpo, come ad esempio la pressione tra due corpi a contatto. Se F_j denota il vettore forza di massa per unità di volume, allora la forza agente su di un elemento di volume ΔV è $F_j \Delta V$. Analogamente se T_j denota il vettore forza di superficie per unità di area, la forza agente su un elemento di superficie ΔS è $T_j \Delta S$. Per esprimere le forze interne, pensiamo a un elemento di area ΔS all'interno del corpo e indichiamo i coseni di direzione della normale a questo elemento con n_j. Chiameremo positiva una faccia dell'elemento ΔS e negativa l'altra. Allora le azioni che dalla faccia positiva si esercitano sulla faccia negativa sono le forze interne di superficie, $T_j \Delta S$, dove T_j è la forza per unità di area sull'elemento ΔS. Questo vettore si chiama **vettore sforzo** ed è in generale una funzione delle coordinate del punto che determina la posizione dell'elemento ΔS e dei coseni di direzione n_j della normale a ΔS. Deve essere ben messo in evidenza che T_j non ha necessariamente la direzione di n_j. In tutti i punti della superficie esterna del corpo, T_j diviene la forza esterna di superficie.

Consideriamo un piccolo parallelepipedo retto con vertice nel punto P ed i cui spigoli siano paralleli agli assi coordinati, e insieme i tre vettori dello sforzo $T_{(1)j}$, $T_{(2)j}$ e $T_{(3)j}$ corrispondenti a tre elementi d'area passanti per P che risultano paralleli ai piani coordinati. Definiamo positivo il vettore dello sforzo $T_{(i)j}$ se agisce nel verso positivo dell'asse y_i ammesso che la normale esterna abbia la direzione e il verso del semiasse positivo y_i. Se invece la normale esterna ha la direzione e il verso del semiasse negativo y_i, allora considereremo il vettore dello sforzo $T_{(i)j}$ positivo se agisce nel verso del semiasse negativo y_i. In altre parole, considereremo positivo uno sforzo di trazione, negativo uno sforzo di compressione. Introduciamo le nove quantità

$$E_{ij} = T_{(i)j} \tag{57.1}$$

e dimostriamo che E_{ij} è un tensore cartesiano, detto **tensore degli sforzi.**

Costruiamo il piccolo tetraedro $PA_1A_2A_3$ tale che gli spigoli PA_i siano paralleli agli assi y_i. Le forze che agiscono sul tetraedro sono le forze di massa $F_j\Delta V$, le forze di superficie $E_{ij}\Delta S_i$ (senza sommatoria sull'indice i) sulla faccia opposta ad A_i e le forze di superficie $T_j\Delta S$ che agiscono sulla faccia $A_1A_2A_3$ (ΔV è il volume del tetraedro, ΔS_i l'area della faccia opposta ad A_i, ΔS l'area della faccia $A_1A_2A_3$). Sia la direzione positiva di T_j quella della normale uscente dal tetraedro, di coseni direttori n_j, e sia p la distanza del punto P dalla faccia $A_1A_2A_3$. Allora $\Delta V = (1/3)\, p\Delta S$ e $\Delta S_i = n_i\Delta S$. Le equazioni di equilibrio secondo i tre assi sono allora

$$F_j\Delta V - E_{ij}\Delta S_i + T_j\Delta S = 0,$$

dove E_{ij} compare con il segno negativo poiché le normali esterne sono orientate come i semiasse negativi. Sostituiamo a ΔV e ΔS_i le rispettive espressioni, dividiamo per ΔS e facciamo tendere a zero il volume del tetraedro, nel qual caso p tende a zero. Il risultato è

$$T_j = E_{ij} n_i. \tag{57.2}$$

Segue dalla legge del quoziente che E_{ij} è un tensore cartesiano. Con la (57.2) possiamo calcolare il vettore dello sforzo per ogni punto e in corrispondenza ad ogni direzione uscente da quel punto in termini dei coseni direttori di questa e del tensore degli sforzi.

Citiamo vari casi importanti di sforzi

1) **Sforzo normale.** Il vettore T_j ha la stessa direzione di n_j e lo stesso verso o l'opposto. Dalle (57.2) si ha che $E_{ij} = C\delta_{ij}$ dove C è una costante. La pressione idrostatica è un esempio di sforzo normale per cui C è negativo.

2) **Tensione semplice.** Consideriamo il tensore degli sforzi $E_{ij} = Cl_i l_j$, dove C è una costante ed l_i è un vettore unitario. Allora il vettore dello sforzo nella direzione l_i è $T_j = Cl_i l_j l_i = Cl_j$ ed ha così la direzione l_j e il verso di l_j o l'opposto. Comunque il vettore dello sforzo nella direzione m_i ortogonale a l_j è $T_j = Cl_i l_j m_i = 0$. Se C è negativo lo sforzo prende il nome di **compressione semplice.**

3) **Sforzo di taglio.** Questo è determinato da un tensore degli sforzi del tipo $E_{ij} = C(l_i m_j + l_j m_i)$ dove C è una costante ed l_i e m_i sono vettori unitari.

Esercizio. Dimostrare che una tensione semplice lungo una qualsiasi direzione insieme con una uguale compressione semplice lungo una direzione ortogonale è equivalente ad uno sforzo di taglio lungo una direzione che biseca l'angolo tra le due direzioni date.

58. Equazioni di equilibrio. Consideriamo un corpo in equilibrio di volume V e di superficie esterna S. La prima equazione cardinale della statica proiettata sugli assi dà

$$\int_V F_j \, dV + \int_S T_j \, dS = 0.$$

Di qui, tenendo conto della (57.2), si ottiene

$$\int_V F_j\, dV + \int_S E_{ij} n_i\, dS = 0,$$

e, applicando il teorema di Gauss,

$$\int_V F_j\, dV + \int_V E_{ij,i}\, dV = 0,$$

cioè

$$\int_V (F_j + E_{ij,i})\, dV = 0,$$

la quale, essendo vera per un volume V qualsiasi, dà luogo alle equazioni indefinite

$$F_j + E_{ij,i} = 0. \tag{58.1}$$

I momenti di una forza rispetto agli assi sono le componenti del momento polare della forza rispetto all'origine degli assi medesimi. Così, con le notazioni tensoriali, i momenti della forza F_i rispetto agli assi restano espressi da $e_{ijk} y_j F_k$. La seconda equazione cardinale della statica applicata al nostro corpo in equilibrio proiettata sugli assi dà, a sua volta:

$$\int_V e_{ijk} y_j F_k\, dV + \int_S e_{ijk} y_j T_k\, dS = 0.$$

Di qui, sempre tenendo conto della (57.2) e applicando il teorema di Gauss, si ottiene

$$\int_V e_{ijk} y_j F_k\, dV + \int_V (e_{ijk} y_j E_{lk})_{,l}\, dV = 0,$$

cioè

$$\int_V e_{ijk} y_j (F_k + E_{lk,l})\, dV + \int_V e_{ijk} \delta_{jl} E_{lk}\, dV = 0.$$

Il primo integrale è nullo in virtù della (58.1) e si ha quindi

$$\int_V e_{ilk} E_{lk}\, dV = 0.$$

Anche qui, per lo stesso motivo di prima, l'integrando $e_{ilk}E_{lk}$ si annulla, e si ha quindi

$$E_{ij} = E_{ji}. \tag{58.2}$$

Si riconosce così che il tensore degli sforzi è simmetrico e le equazioni di equilibrio per un generico sistema continuo e in particolare per un corpo elastico si riducono alle (58.1).

59. Legge di Hooke generalizzata. Nella teoria elementare dell'elasticità, la legge di Hooke stabilisce che la tensione di un filo elastico è proporzionale all'estensione. In altre parole lo sforzo è proporzionale alla deformazione. L'assunzione corrispondente nella teoria generale dell'elasticità è che il tensore degli sforzi è una funzione lineare e omogenea del tensore di deformazione, cioè

$$E_{ij} = c_{ijkl} e_{kl}. \tag{59.1}$$

Segue dalla legge del quoziente che c_{ijkl} è un tensore cartesiano del quarto ordine, chiamato **tensore dell'elasticità.** Inoltre per la simmetria di E_{ij} e e_{kl} si trova che c_{ijkl} è simmetrico non solo rispetto agli indici i e j ma anche rispetto a k e l.

Si dice che un corpo è **omogeneo** se le proprietà elastiche del corpo sono indipendenti dal punto preso in considerazione. Questo significa che le componenti del tensore dell'elasticità sono tutte costanti per un corpo omogeneo.

Un corpo si dice poi **isotropo** se le proprietà elastiche in un punto sono eguali in tutte le direzioni uscenti da quel punto. Questo significa che il tensore dell'elasticità c_{ijkl} si trasforma in se stesso per ogni rotazione degli assi.

60. Tensori isotropi. Un tensore cartesiano che si trasformi in se stesso per una rotazione degli assi vien detto **tensore isotropo.** Abbiamo già incontrato due tensori isotropi, precisamente δ_{ij} e e_{ijk}. Cerchiamo ora il più generale tensore isotropo c_{ijkl} del quarto ordine. La sua legge di trasformazione (55.1) diviene

$$c_{ijkl} = a_{ir}a_{js}a_{kt}a_{lu}c_{rstu}. \tag{60.1}$$

Rotiamo gli assi di 180° attorno all'asse y_3. Deduciamo dalla (54.2) che $a_{ik} = -\delta_{ik} + 2l_il_k$. Ma per questa trasformazione $l_1 = l_2 = 0$ ed $l_3 = 1$, e così le sole componenti non nulle di a_{ik} sono

$$a_{11} = -1, \quad a_{22} = -1, \quad a_{33} = +1.$$

Sostituendo nella (60.1) otteniamo $c_{ijkl} = -c_{ijkl}$, cioè $c_{ijkl} = 0$ nei casi seguenti:

1) tre indici eguali ad 1 e l'altro eguale a 3.

2) tre indici eguali a 2 e l'altro eguale a 3.

3) due indici eguali ad 1, un altro eguale a 2 e l'altro eguale a 3.

4) due indici eguali a 2, un altro eguale a 1 e l'altro eguale a 3.

Risultati analoghi si ottengono in corrispondenza di rotazioni di 180° attorno agli assi y_1 e y_2. Quindi le sole componenti che rimangono sono quelle per cui i quattro indici sono eguali o sono eguali a coppia.

Rotiamo gli assi di 90° attorno all'asse y_3. Per tale trasformazione deduciamo dalla (54.2) che $a_{ik} = l_il_k + e_{ijk}l_j$ e le sole componenti non nulle di a_{ik} sono

$$a_{12} = -1; \quad a_{21} = +1; \quad a_{33} = +1.$$

Sostituendo direttamente nella (60.1) abbiamo che

$$\begin{gathered} c_{1111} = c_{2222}, \\ c_{1122} = c_{2211}, \ c_{1133} = c_{2233}, \ c_{3311} = c_{3322}, \\ c_{1212} = c_{2121}, \ c_{1313} = c_{2323}, \ c_{3131} = c_{3232}, \\ c_{1221} = c_{2112}, \ c_{1331} = c_{2332}, \ c_{3113} = c_{3223}. \end{gathered}$$

Risultati analoghi si ottengono con le corrispondenti rotazioni di 90° attorno agli assi y_1 e y_2. Possiamo riunire tutti i nostri risultati nella forma

$$\left\{ \begin{gathered} c_{iiii} = c_{jjjj}, \\ c_{iijj} = c_{iikk} = c_{lljj} = c_{llkk}, \\ c_{ijij} = c_{ikik} = c_{ljlj} = c_{lklk}, \\ c_{ijji} = c_{ikki} = c_{ljjl} = c_{lkkl}, \end{gathered} \right. \tag{60.2}$$

dove i, j, k ed l non sono eguali e non è applicata la convenzione della sommatoria. Tutte le altre componenti sono nulle. La soluzione più generale delle equazioni (60.2) è allora

$$c_{ijkl} = \lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu\delta_{ik}\delta_{jl} + \nu\delta_{il}\delta_{jk} + \varkappa\delta_{ijkl}, \tag{60.3}$$

dove λ, μ, ν e $\varkappa$ sono degli invarianti cartesiani, e $\delta_{ijkl} = 1$ se tutti e quattro gli indici sono eguali mentre è nullo in ogni altro caso.

Infine eseguiamo una piccola rotazione rappresentata da $a_{ik} = \delta_{ik} + s_{ik}$, dove s_{ik} è emisimmetrico e infinitesimo del primo ordine. Sostituendo nella (60.1) e conservando solo i termini del primo ordine si ha

$$s_{ir}c_{rjkl} + s_{js}c_{iskl} + s_{kt}c_{ijtl} + s_{lu}c_{ijku} = 0.$$

Scegliamo $i = 2$, $j = k = l = 1$. Dato che $s_{12} = -s_{21}$, i termini non nulli di questa equazione ci danno

$$c_{1111} = c_{2211} + c_{2121} + c_{2112}.$$

Sostituendo in questa le espressioni fornite dalla (60.3) otteniamo

$$\lambda + \mu + \nu + \varkappa = \lambda + \mu + \nu$$

che dà $\varkappa = 0$, così che possiamo scrivere

$$c_{ijkl} = \lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu\delta_{ik}\delta_{jl} + \nu\delta_{il}\delta_{jk}. \tag{60.4}$$

Questo tensore è chiaramente isotropo e rappresenta il più generale tensore isotropo del quarto ordine.

Esercizio 1. Dimostrare che i più generali tensori isotropi del secondo e del terzo ordine sono rispettivamente $\lambda\delta_{ij}$ e λe_{ijk}, dove λ è un invariante.

Esercizio 2. Dimostrare che c_{ijkl} definito dalla (60.3) soddisfa le relazioni di simmetria $c_{ijkl} = c_{klij}$ e $c_{ijkl} = c_{jilk}$.

61. Corpo omogeneo e isotropo. Per un corpo omogeneo e isotropo il tensore dell'elasticità è isotropo con componenti costanti. Cerchiamo perciò un tensore isotropo c_{ijkl} che sia simmetrico sia in i e j che in k e l, e le cui componenti siano tutte costanti. Per ottenere un tale tensore sostituiamo da (60.4) nell'equazione $c_{ijkl} = c_{ijlk}$: si ottiene così

$$(\mu - \nu)\,(\delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk}) = 0.$$

Ponendo in questa $i = k = 1$, $j = l = 2$ si vede che è $\mu = \nu$. Così il tensore isotropo

$$c_{ijkl} = \lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) \tag{61.1}$$

soddisfa la richiesta simmetria. La legge di Hooke generalizzata (59.1) per un corpo omogeneo ed isotropo si può allora porre nella forma

$$E_{ij} = [\lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk})]\, e_{kl}$$

dove λ e μ sono costanti. Questa equazione, introducendo la dilatazione θ definita dalla (56.5), si semplifica nella

$$E_{ij} = \lambda\theta\delta_{ij} + 2\mu e_{ij}. \tag{61.2}$$

Contraendo i e j si ha infine la relazione

$$\Theta = E_{ii} = (3\lambda + 2\mu)\,\theta, \tag{61.3}$$

che collega i due invarianti θ e Θ.

Risolviamo ora le equazioni (61.2) per il tensore di deformazione in termini del tensore degli sforzi; in virtù della (61.3) otteniamo

$$e_{ij} = -\frac{\lambda\Theta}{2\mu(3\lambda+2\mu)}\,\delta_{ij} + \frac{1}{2\mu}\,E_{ij}. \tag{61.4}$$

Se, come abitualmente si fa, si introducono il **modulo di Young** E e il **rapporto di Poisson** σ, dati rispettivamente da

$$E = \frac{\mu(3\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu}\,, \quad \sigma = \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}\,, \tag{61.5}$$

la (61.4) si scrive

$$e_{ij} = \frac{1}{E}\,\{-\sigma\Theta\delta_{ij} + (1+\sigma)\,E_{ij}\}. \tag{61.6}$$

Possiamo ottenere le equazioni di compatibilità degli sforzi sostituendo questa espressione di e_{ij} nella (56.6)

Qualche volta occorrono le equazioni di equilibrio in funzione del vettore spostamento u_i. Per ottenerle riscriviamo la (58.1) tenendo conto della (61.2): si hanno così le equazioni

$$F_j + \lambda\theta_{,i}\delta_{ij} + 2\mu e_{ij,i} = 0,$$

che, per mezzo della (56.2), si trasformano nelle

$$F_j + \lambda\theta_{,j} + \mu(u_{i,ji} + u_{j,ii}) = 0.$$

Ma $\theta = e_{ii} = \frac{1}{2}\,(u_{i,i}+u_{i,i}) = u_{i,i}$. Di conseguenza $\theta_{,j} = u_{i,ij}$ e le equazioni precedenti prendono la forma

$$F_j + (\lambda+\mu)\,\theta_{,j} + \mu\nabla^2 u_j = 0 \tag{61.7}$$

dove ∇^2 è l'operatore laplaciano. Ora che siamo ritornati allo spostamento u_i non abbiamo più bisogno di alcuna equazione di compatibilità.

Esercizio. Dimostrare che se un corpo omogeneo e isotropo è in equilibrio senza essere sottoposto a forze esterne, allora si ha $\nabla^2\theta = 0$.

62. Coordinate curvilinee. Molti problemi di elasticità possono essere esaminati più convenientemente servendosi di coordinate curvilinee x^i, in cui l'elemento lineare ds è dato da $ds^2 = g_{ij}dx^idx^j$. In questo caso dobbiamo ritornare alla distinzione tra controvarianza e covarianza.

Il sistema delle coordinate serve solo a descrivere deformazioni e sforzi. Ma le leggi dell'elasticità sono per sè stesse indipendenti dal sistema di coordinate, e per questo motivo tali leggi possono essere formulate mediante equazioni tensoriali. Ricordiamo dal n. 9, che se un tensore è nullo in un sistema di coordinate, esso risulta nullo in tutti i sistemi di coordinate. Di conseguenza se scriviamo le equazioni tensoriali, che in coordinate cartesiane si riducono ai risultati di già stabiliti, queste esprimono la teoria rispetto ad un qualsiasi sistema di coordinate curvilinee. Verifichiamo così, immediatamente, che le leggi dell'elasticità sono rappresentate dalle seguenti equazioni tensoriali:

$$e = e_{ij}l^il^j,\ e_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}),\ \theta = g^{ij}e_{ij},$$

$$e_{ij,kl} + e_{kl,ij} - e_{ik,jl} - e_{jl,ik} = 0,$$

$$T_i = E_{ji}n^j,\ E_{ij} = E_{ji},\ F^j + E^{ij}_{,i} = 0,$$

$$E_{ij} = c_{ijkl}e^{kl},\ c_{ijkl} = c_{jikl} = c_{ijlk}.$$

Se il corpo è omogeneo ed isotropo abbiamo in più

$$c_{ijkl} = \lambda g_{ij}g_{kl} + \mu(g_{ki}g_{lj} + g_{kj}g_{li}),$$

$$E_{ij} = \lambda\theta g_{ij} + 2\mu e_{ij},\ \Theta = g^{ij}E_{ij} = (3\lambda + 2\mu)\,\theta,$$

$$e_{ij} = \frac{1}{E}\{-\sigma\Theta g_{ij} + (1+\sigma)\,E_{ij}\}$$

$$F_j + (\lambda + \mu)\,\theta_{,j} + \mu g^{rs}u_{j,rs} = 0.$$

In tutte queste equazioni l^i è un vettore unitario che specifica la direzione dell'estensione e, n^i è il vettore unitario normale all'elementino ΔS, e le virgole indicano ancora una volta la derivazione covariante.

È importante notare che le componenti dei vettori u_i, T_i e F_i possono non avere un significato *fisico* dimensionalmente corretto. Per esempio, l'esercizio del n. 5 mostra che la seconda componente del vettore accelerazione in coordinate polari è una accelerazione *angolare*. Sarà sufficiente prendere in considerazione il vettore forza F_i, le cui componenti in un sistema cartesiano sono $\bar{F}_i$, $= \bar{F}^i$. Allora $F_i = \partial\bar{x}^j/\partial x^i \bar{F}_j$ e $F^i = \partial x^i/\partial\bar{x}^j \bar{F}^j$ sono rispettivamente le componenti covarianti e controvarianti nel sistema x^i, dove abbiamo indicato con $\bar{x}^i = y_i$ le variabili cartesiane. La componente di F^i, che è «fisicamente» il vettore forza, nella direzione del vettore unitario $\bar{l}^i = \bar{l}_i$ è data in ogni punto dall'invariante $\bar{F}^i\bar{l}_i = F^i l_i = g_{ij}F^i l^j$. Il vettore unitario controvariante nella direzione dell'asse x^1 è $\delta^i_1/\sqrt{g_{11}}$. Perciò la componente «fisica» della forza lungo, per es., la linea coordinata x^1 è data da $g_{ij}F^i\delta^j_1/\sqrt{g_{11}} = g_{i1}F^i/\sqrt{g_{11}}$. Nell'esercizio del n. 5, abbiamo $g_{11} = 1$, $g_{12} = 0$, $g_{22} = r^2$ e così le componenti «fisiche» dell'accelerazione in coordinate polari sono

$$\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2, \quad r\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt},$$

che rappresentano, rispettivamente, l'accelerazione radiale e quella trasversa.

Analogamente i tensori e_{ij} ed E_{ij} non hanno alcun significato fisico diretto. Consideriamo il tensore della deformazione e_{ij} che è legato al tensore cartesiano della deformazione $\bar{e}_{kl}$ dalla relazione $e_{ij} = \dfrac{\partial\bar{x}^k}{\partial x^i}\dfrac{\partial\bar{x}^l}{\partial x^j}\bar{e}_{kl}$. La componente «fisica» del tensore di deformazione associata alle direzioni dei vettori unitari l^i e m^i in un punto si può definire come l'invariante $e_{ij}l^i m^j$.

A titolo di esempio consideriamo il caso delle coordinate cilindriche r, θ e z legate alle coordinate cartesiane dalle relazioni

$$y_1 = r\cos\theta,\ y_2 = r\,\mathrm{sen}\,\theta,\ y_3 = z.$$

Le componenti non nulle del tensore fondamentale sono

$$g_{11} = 1,\ g_{22} = r^2,\ g_{33} = 1$$

da cui si ha che

$$g^{11} = 1,\ g^{22} = \frac{1}{r^2},\ g^{33} = 1,\ g^{ij} = 0 \ \text{se}\ i \neq j.$$

Così gli unici simboli di Christoffel di seconda specie che rimangono sono

$$\left\{ \frac{1}{22} \right\} = -r,\quad \left\{ \frac{2}{12} \right\} = \frac{1}{r}.$$

Le componenti fisiche $(u_\alpha, u_\beta, u_\gamma)$ del vettore spostamento u_i sono attualmente

$$u_\alpha = u_1,\ u_\beta = \frac{1}{r}\,u_2,\ u_\gamma = u_3.$$

Ulteriori calcoli dimostrano che le componenti del tensore di deformazione son date da

$$e_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial r},\ e_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial \theta} + ru,\quad e_{33} = \frac{\partial u_3}{\partial z},$$

$$e_{12} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial \theta} + \frac{\partial u_2}{\partial r} - \frac{2u_2}{r}\right),\quad e_{23} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial z} + \frac{\partial u_3}{\partial \theta}\right),$$

$$e_{31} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_3}{\partial r} + \frac{\partial u_1}{\partial z}\right),$$

mentre le componenti fisiche associate alle direzioni delle linee coordinate sono

$$e_{\alpha\alpha} = \frac{\partial u_\alpha}{\partial r}, \quad e_{\beta\beta} = \frac{1}{r}\frac{\partial u_\beta}{\partial \theta} + \frac{u_\alpha}{r}, \quad e_{\gamma\gamma} = \frac{\partial u_\gamma}{\partial z},$$

$$e_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_\alpha}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\beta}{\partial r} - \frac{u_\beta}{r}\right), \quad e_{\alpha\gamma} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_\gamma}{\partial r} + \frac{\partial u_\alpha}{\partial z}\right),$$

$$e_{\gamma\beta} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_\beta}{\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_\gamma}{\partial \theta}\right).$$

La dilatazione vale

$$\theta = g^{ij}e_{ij} = \frac{\partial u_\alpha}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_\beta}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\gamma}{\partial z} + \frac{u_\alpha}{r}.$$

Esercizio. Trovare le componenti fisiche del tensore di deformazione associate alle direzioni delle linee coordinate in funzione delle componenti fisiche del vettore spostamento quando le coordinate sono polari sferiche.

63. Meccanica dei sistemi continui. Esaminiamo il moto di un mezzo continuo con il metodo di Eulero. Invece di seguire il percorso tracciato da una particolare particella, fissiamo la nostra attenzione su un determinato punto P del mezzo le cui coordinate, riferite ad un sistema cartesiano, siano y_i. Indichiamo con u_i il vettore velocità di quella particella che viene a trovarsi in P al tempo t, e che, pertanto, è generalmente funzione di y_i e t. Dopo un intervallo di tempo Δt, la particella che originariamente si trovava in P si trova nel punto $y_i + u_i\Delta t$ con velocità $u_i + \Delta u_i$. Perciò $u_i + \Delta u_i$ è la funzione u_i calcolata nel punto $y_i + u_i\Delta t$ e al tempo $t + \Delta t$. Sviluppando in base al teorema di Taylor si ha

$$u_i + \Delta u_i = u_i + u_j\,\Delta t\,u_{i,j} + \Delta t\,\frac{\partial u_i}{\partial t}.$$

Il vettore accelerazione f_i nel punto P è dato dal limite di $\Delta u_i/\Delta t$ per Δt che tende a zero. Da qui deduciamo che il vettore accelerazione è dato da

$$f_i = u_j u_{i,j} + \frac{\partial u_i}{\partial t}. \tag{63.1}$$

Consideriamo ora un volume V del mezzo, limitato dalla superficie S. La massa M contenuta nel volume V è data da $M = \int_V \rho dV$, dove la densità ρ è una funzione di y_i e di t. Allora l'incremento di massa nell'unità di tempo è $dM/dt = \int_V \partial\rho/\partial t\, dV$. Indichiamo con n_i i coseni di direzione della normale esterna all'elemento di superficie ΔS. La massa uscente nell'unità di tempo dall'elemento ΔS è data da $\rho n_i u_i \Delta S$. Quindi l'incremento di massa nell'unità di tempo è espresso anche dall'integrale superficiale $-\int_S \rho n_i u_i dS$. Di conseguenza abbiamo

$$\int_S \rho n_i u_i dS + \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = 0.$$

Applichiamo il teorema di Gauss all'integrale superficiale ed otteniamo

$$\int_V (\rho u_i)_{,i}\, dV + \int_V \frac{\partial p}{\partial t} dV = 0.$$

Questa equazione è un'identità, e ne deriva così l'**equazione di continuità**

$$(\rho u_i)_{,i} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0. \tag{63.2}$$

Fisicamente questa equazione esprime il principio di conservazione della massa.

Al n. 58 abbiamo esaminato l'equilibrio di un mezzo continuo. Nello stesso modo si possono determinare le equazioni del moto. Se sostituiamo F_j con $F_j - \rho f_j$ le equazioni del n. 58 divengono

$$\rho f_j = F_j + E_{ij,i}. \tag{63.3}$$

Se esprimiamo ora f_j mediante la (63.1) otteniamo

$$\rho u_i u_{j,i} + \rho \frac{\partial u_j}{\partial t} = F_j + E_{ij,i}.$$

Questa equazione si può scrivere in virtù della (63.2) nella forma

$$[\rho u_i u_j - E_{ij}]_{,i} + \frac{\partial}{\partial t}(\rho u_j) = F_j. \tag{63.4}$$

Le equazioni (63.2) e (63.4) costituiscono le equazioni del moto di un mezzo continuo.

In un sistema di coordinate curvilinee le (63.2) e (63.4) si possono esprimere nella forma tensoriale

$$(\rho u^i)_{,i} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0, \tag{63.5}$$

$$(\rho u^i u^j - E^{ij})_{,i} + \frac{\partial}{\partial t}(\rho u^j) = F^j. \tag{63.6}$$

Soluzioni degli es. proposti al n. 54 e al n. 62

n. 54. Le sole componenti non nulle di a_{ik} sono

$$a_{12} = -1; \; a_{21} = +1; \; a_{33} = 1.$$

n. 62.

$$e_{\alpha\alpha} = \frac{\partial u_\alpha}{\partial r}\,; \quad e_{\beta\beta} = \frac{1}{r}\frac{\partial u_\beta}{\partial \theta} + \frac{u_\alpha}{r}\,;$$

$$e_{\gamma\gamma} = \frac{1}{r \operatorname{sen} \theta}\frac{\partial u_\gamma}{\partial \psi} + \frac{u_\alpha}{r} + \frac{\cot \theta}{r} u_\beta;$$

$$e_{\beta\gamma} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r \operatorname{sen} \theta}\frac{\partial u_\beta}{\partial \psi} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_\gamma}{\partial \theta} - \frac{\cot \theta}{r} u_\gamma\right)\,;$$

$$e_{\gamma\alpha} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r \operatorname{sen} \theta}\frac{\partial u_\alpha}{\partial \psi} + \frac{\partial u_\gamma}{\partial r} - \frac{u_\gamma}{r}\right)\,;$$

$$e_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_\alpha}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\beta}{\partial r} - \frac{u_\beta}{r}\right).$$

Capitolo VIII

TEORIA DELLA RELATIVITÀ

64. Teoria della relatività ristretta. Nella meccanica classica, la posizione nello spazio di un punto, sede di un evento, può essere determinata dalle sue tre coordinate spaziali x^1, x^2, x^3, riferite ad un sistema cartesiano ortogonale. Un osservatore può misurare anche, per mezzo di un orologio, l'istante t in cui l'evento ha luogo. Un evento viene allora ad essere fissato sia nello spazio che nel tempo per mezzo del **sistema** S costituito dai quattro numeri x^1, x^2, x^3, t.

Einstein esaminò il concetto di « simultaneità » e giunse alla conclusione che la nozione di « eventi simultanei in punti diversi » non ha senso in mancanza di ulteriori precisazioni. Continuando in questo studio di idee fondamentali, Einstein giunse alla teoria della relatività ristretta, che egli basò sui due principi seguenti: 1) *è impossibile rivelare il moto traslatorio uniforme di un sistema mediante esperienze di qualsiasi natura eseguite nell'interno del sistema*: 2) *la velocità c di un raggio di luce è una costante che non dipende dalla velocità relativa della sua sorgente e dell'osservatore.*

Consideriamo ora due sistemi S e $\bar{S}$ che coincidono al tempo $t = 0$ e tali che $\bar{S}$ si muova alla velocità costante V lungo l'asse x^1 del sistema S. Allora la **trasformazione di Lorentz**, che può esser dedotta dai due principi della relatività ristretta, mette in relazione le coordinate spaziali ed il tempo di entrambi i sistemi per mezzo delle equazioni

$$\bar{x}^1 = \beta(x^1 - Vt), \quad \bar{x}^2 = x^2, \quad \bar{x}^3 = x^3, \quad \bar{t} = \beta(t - Vx^1/c^2),$$

dove $\beta = (1 - V^2/c^2)^{-1/2}$. Possiamo facilmente verificare che

$$\begin{aligned} &- (d\bar{x}^1)^2 - (d\bar{x}^2)^2 - d\bar{x}^3)^2 + c^2(d\bar{t})^2 \\ &= - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2 + c^2(dt)^2. \end{aligned}$$

L'invarianza di questa equazione rispetto alle trasformazioni di Lorentz, suggerisce che lo **spazio di Minkowski**, definito dalla metrica

$$d\sigma^2 = - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2 + c^2(dx^4)^2 \tag{64.1}$$

dove $x^4 = t$, è appropriato per la trattazione geometrica della relatività ristretta. Indichiamo l'elemento lineare di questo spazio quadrimensionale con $d\sigma$ (non con ds) allo scopo di mettere in rilievo che $d\sigma$ non è la distanza fisica tra due punti vicini.

Lo spazio di Minkowski è piatto e la sua « segnatura », che eguaglia l'eccesso del numero dei termini positivi sul numero dei termini negativi nella sua metrica, è -2. È ben noto che non esiste una trasformazione di coordinate reali che possa ridurre (64.1) alla metrica di uno spazio euclideo quadrimensionale, la cui segnatura è 4. Ne consegue che la geometria dello spazio di Minkowski si differenzia sotto molti aspetti dalla geometria euclidea; per esempio in essa esistono curve nulle reali [v. (15.2)] e geodetiche nulle reali.

In questo capitolo gli indici latini avranno un campo di variazione da 1 a 3 mentre gli indici greci da 1 a 4. La velocità u di una particella, che si trovi nel punto x^i, ha le componenti $u^i = \dfrac{dx^i}{dt}$ riferite al sistema S. Dalla (64.1) deriva che

$$\frac{dt}{d\sigma} = \frac{1}{c}\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{-1/2}. \tag{64.2}$$

Il vettore quadrimensionale di Minkowski, definito da $m_0 c \dfrac{dx^\alpha}{d\sigma}$, dove m_0 è una costante, è detto **vettore della**

quantità di moto. Nella teoria della relatività ristretta la quarta componente $m_0 c \dfrac{dx^4}{d\sigma}$ si identifica con la massa m della particella mobile. In virtù della (64.2) abbiamo

$$m = m_0 \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{-1/2}. \tag{64.3}$$

La costante m_0 è la massa quando $u = 0$ ed è chiamata **massa di riposo** o **di quiete** della particella. La massa m, che chiaramente aumenta con la velocità, è chiamata **massa relativistica** della particella. Le componenti

$$m_0 c \frac{dx^i}{d\sigma} = m_0 c \frac{dx^i}{dt} \frac{dt}{d\sigma} = m \frac{dx^i}{dt}$$

sono generalizzazioni evidenti del vettore quantità di moto newtoniano.

Definiamo il **vettore forza**, quadrimensionale, di Minkowski, F^α, con

$$F^\alpha = m_0 c^2 \frac{d^2 x^\alpha}{d\sigma^2} = c^2 \frac{d}{d\sigma}\left(m_0 \frac{dx^\alpha}{d\sigma}\right) = \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{-1/2} \frac{d}{dt}\left(m \frac{dx^\alpha}{dt}\right). \tag{64.4}$$

Il vettore forza newtoniano è $X^i = \dfrac{d}{dt}\left(m \dfrac{dx^i}{dt}\right)$ e si ha quindi

$$F^i = \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{-1/2} X^i.$$

Dallo sviluppo di (64.3) otteniamo

$$mc^2 = m_0 c^2 + \frac{1}{2} m_0 u^2 + \dots$$

e la teoria della relatività ristretta identifica l'energia E associata ad una particella a mezzo dell'equazione $E = mc^2$. Perciò

$$F^4 = \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{-1/2} \frac{dm}{dt} = \frac{1}{c^2}\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{-1/2} \frac{dE}{dt}\,.$$

Il moto di una particella che si muove sotto l'azione di qualche sistema di forze può essere rappresentato nello spazio di Minkowski da una curva, detta **linea di universo** della particella. Se sulla particella non agiscono forze, vediamo da (64.4) che $d^2x^\alpha/d\sigma^2 = 0$. Quindi la linea di universo di una particella libera, è una geodetica dello spazio di Minkowski.

La velocità di un raggio di luce è la costante c, e vediamo così dalla (64.1) che per tale raggio si ha $d\sigma = 0$. Conformemente la linea di universo di un raggio di luce è una geodetica nulla dello spazio di Minkowski.

Al fine di esaminare la meccanica di un mezzo continuo, introduciamo il **tensore dell'energia - quantità di moto,** $T^{\alpha\beta}$, simmetrico e quadrimensionale, definito da

$$T^{ij} = T^{ji} = \rho u^i u^j - E^{ij}\,; \quad T^{i4} = T^{4i} = \rho u^i\,; \quad T^{44} = \rho,$$

dove ρ è la densità e E^{ij} è il tensore cartesiano degli sforzi definito nel n. 57. Quindi la teoria ristretta generalizza le (63.5) e (63.6), che sono le equazioni di moto di un mezzo continuo, nella

$$T^{\alpha\beta}_{\ \ ,\alpha} = F^\beta. \tag{64.5}$$

Se passiamo alle coordinate polari sferiche r, θ e ψ, la metrica dello spazio di Minkowski diventa

$$d\sigma^2 = -dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \operatorname{sen}^2\theta\, d\psi^2 + c^2 dt^2. \tag{64.6}$$

65. Equazioni di Maxwell. Alla base della teoria classica dell'elettrodinamica, secondo Lorentz, sono il **potenziale elettrico** φ, che è uno scalare, e il **potenziale magnetico** A_i che è un vettore. Il vettore **campo elet-**

trico E_i ed il vettore **campo magnetico** H_i, sono legati a questi potenziali dalle relazioni

$$E_i = -\operatorname{grad}\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial A_i}{\partial t},$$

$$H_i = \operatorname{rot} A_i.$$

Le equazioni di Maxwell, quando si usino unità elettrostatiche, sono le seguenti:

$$\begin{cases} \operatorname{div} E_i = 4\pi\rho, \\ \operatorname{div} H_i = 0, \\ \operatorname{rot} E_i + \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial H_i}{\partial t} = 0, \\ \operatorname{rot} H_i - \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial E_i}{\partial t} = \dfrac{4\pi}{c} j_i, \end{cases} \tag{65.1}$$

dove j_i è il vettore **densità di corrente** e ρ è la **densità di carica.**

Nello spazio di Minkowski, con la metrica (64.1), formiamo il vettore potenziale quadrimensionale Φ_α ed il vettore densità di corrente, quadrimensionale, J^α, definiti rispettivamente dalle

$$\Phi_\alpha \equiv (-A_1, -A_2, -A_3, c\varphi),$$

$$J_\alpha \equiv (j_1, j_2, j_3, \rho),$$

rispetto ad un particolare sistema di coordinate. Introduciamo poi il tensore emisimmetrico $\eta_{\alpha\beta}$ definito da

$$\eta_{\alpha\beta} = \Phi_{\alpha,\beta} - \Phi_{\beta,\alpha} = \frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial x^\beta} - \frac{\partial \Phi_\beta}{\partial x^\alpha},$$

del quale possiamo immediatamente verificare che le componenti non nulle nell'assegnato sistema di coordinate sono

$$\eta_{23} = -\eta_{32} = H_1; \quad \eta_{31} = -\eta_{13} = H_2; \quad \eta_{12} = -\eta_{21} = H_3;$$

$$\eta_{14} = -\eta_{41} = cE_1; \quad \eta_{24} = -\eta_{42} = cE_2; \quad \eta_{34} = -\eta_{43} = cE_3.$$

Se ne possono ottenere le componenti controvarianti non nulle $\eta^{\alpha\beta}$, e sono

$$\eta^{23} = -\eta^{32} = H_1; \quad \eta^{31} = -\eta^{13} = H_2; \quad \eta^{12} = -\eta^{21} = H_3;$$

$$\eta^{14} = -\eta^{41} = -\frac{E_1}{c}; \; \eta^{24} = -\eta^{42} = -\frac{E_2}{c}; \; \eta^{34} = -\eta^{43} = -\frac{E_3}{c}.$$

Scriviamo ora le equazioni di Maxwell (65.1) in termini di η e di J:

$$\frac{\partial \eta^{41}}{\partial x^1} + \frac{\partial \eta^{42}}{\partial x^2} + \frac{\partial \eta^{43}}{\partial x^3} = \frac{4\pi}{c} J^4,$$

$$\frac{\partial \eta_{23}}{\partial x^1} + \frac{\partial \eta_{31}}{\partial x^2} + \frac{\partial \eta_{12}}{\partial x^3} = 0,$$

$$\frac{\partial \eta_{ij}}{\partial x^4} + \frac{\partial \eta_{j4}}{\partial x^i} + \frac{\partial \eta_{4i}}{\partial x^j} = 0,$$

$$\frac{\partial \eta^{i1}}{\partial x^1} + \frac{\partial \eta^{i2}}{\partial x^2} + \frac{\partial \eta^{i3}}{\partial x^3} + \frac{\partial \eta^{i4}}{\partial x^4} = \frac{4\pi}{c} J^i.$$

La prima e l'ultima di queste equazioni si combinano insieme nella forma

$$\eta^{\alpha\beta}_{\ ,\beta} = \frac{4\pi}{c} J^\alpha, \tag{65.2}$$

mentre le rimanenti due sono rappresentate insieme dalle equazioni

$$\eta_{\alpha\beta,\gamma} + \eta_{\beta\gamma,\alpha} + \eta_{\gamma\alpha,\beta} = 0 \tag{65.3}$$

che non si annullano identicamente.

Abbiamo così scritto le equazioni di Maxwell in forma tensoriale nello spazio di Minkowski. Esse sono quindi invarianti rispetto al gruppo di trasformazioni di Lorentz.

66. Teoria della relatività generale. Ci indirizziamo ora verso la teoria della relatività generale, che è stata svolta da Einstein principalmente in ordine al problema della gravitazione. Egli postulò il **principio di covarianza**, secondo il quale le leggi della fisica debbono essere indipendenti dalle coordinate spazio-temporali. Ciò tolse alla trasformazione di Lorentz il ruolo privilegiato che essa aveva e lo spazio di Minkowski fu rimpiazzato dal V_4 di Rienmann con la metrica

$$d\sigma^2 = g_{\alpha\beta}\, dx^\alpha dx^\beta. \tag{66.1}$$

Eistein introdusse anche il **principio di equivalenza**, il quale essenzialmente stabilisce che il tensore fondamentale $g_{\alpha\beta}$ può essere scelto in modo da render conto della presenza di un campo gravitazionale. Cioè, $g_{\alpha\beta}$ dipende dalla distribuzione della materia ed energia nello spazio fisico.

Materia ed energia possono essere specificati dal tensore energia-quantità di moto $T^{\alpha\beta}$ che nella teoria ristretta soddisfa la relazione $T^{\alpha\beta}_{,\alpha} = F^\beta$. Le sole forze, quelle dovute alla gravitazione, sono comunque già prese in considerazione nella scelta del tensore fondamentale $g_{\alpha\beta}$. Ignoriamo perciò F^β e allora, in conformità con il principio di covarianza, il tensore energia-quantità di moto deve soddisfare l'equazione $T^{\alpha\beta}_{,\alpha} = 0$. Scriveremo questa equazione nella forma equivalente $T^{\alpha}_{.\beta,\alpha} = 0$ dove $T^{\alpha}_{.\beta} = g_{\beta\gamma}T^{\alpha\gamma}$ è il tensore misto energia-quantità di moto. Il problema ora è di determinare $T^{\alpha}_{.\beta}$ come una funzione di $g_{\alpha\beta}$ e delle sue derivate fino al secondo ordine, tenendo presente che $T^{\alpha}_{.\beta,\alpha} = 0$. Ricordiamo da (34.3) che il tensore di Einstein definito da

$$G^{\alpha}_{.\beta} = g^{\alpha\gamma} R_{\beta\gamma} - \frac{1}{2} R\delta^{\alpha}_{\beta} \tag{66.2}$$

soddisfa l'equazione $G^{\alpha}_{.\beta,\alpha} = 0$. Le equazioni di moto esigono $T^{\alpha}_{.\beta,\alpha} = 0$, ma solo eccezionalmente $G^{\alpha}_{.\beta,\alpha} = 0$ è una identità nella geometria riemanniana. Questo portò Einstein a proporre la relazione

$$\varkappa T^{\alpha}_{.\beta} + G^{\alpha}_{.\beta} = 0. \tag{66.3}$$

Queste equazioni costituiscono il legame tra il tensore fisico dell'energia-quantità di moto $T^{\alpha}_{.\beta}$ e il tensore geometrico $G^{\alpha}_{.\beta}$ del V_4 della relatività generale. Affinché si possa dedurre la teoria di gravitazione di Newton come una prima approssimazione dalla teoria di Einstein, occorre scegliere $\varkappa = 8\pi k/c^4$ dove k è la costante gravitazionale, pari a $6{,}664 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{cm}^3\,\mathrm{gm}^{-1}\,\mathrm{sec}^{-2}$. Il valore di c è $2{,}99796 \cdot 10^{10}$ $\mathrm{cm\,sec}^{-1}$, e così $\varkappa$ ha il valore $2{,}073 \cdot 10^{-48}\,\mathrm{cm}^{-1}\,\mathrm{gm}^{-1}\,\mathrm{sec}^2$ in unità c.g.s.

Nella teoria ristretta, le linee di universo di particelle libere e dei raggi di luce sono rispettivamente geodetiche e geodetiche nulle dello spazio di Minkowski. Il principio di equivalenza richiede che tutte le particelle siano considerate particelle libere, quando la forza di gravitazione è l'unica forza presa in considerazione. Segue allora dal principio di covarianza che la linea di universo di una particella sotto l'azione di forze gravitazionali è una geodetica del V_4 con la metrica (66.1). Similmente la linea di universo di un raggio di luce è una geodetica nulla.

67. Metrica a simmetria sferica. La relatività generale, considera diversi importanti problemi in cui il sistema di coordinate r, θ, ψ e t è tale da dare alla metrica la forma

$$d\sigma^2 = -e^{\lambda}dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \operatorname{sen}^2\theta\, d\psi^2 + c^2 e^{\nu} dt^2, \qquad (67.1)$$

dove λ e ν sono funzioni di r. Una metrica di questo tipo si dice **a simmetria sferica**. Essa è una generalizzazione della metrica della relatività ristretta (64.6), espressa in coordinate polari sferiche. Per i coefficienti di dr^2 e dt^2 sono stati scelti degli esponenziali al fine di assicurare che la segnatura di $d\sigma^2$ sia -2. Scriviamo $x^1 = r$, $x^2 = \theta$, $x^3 = \psi$, e $x^4 = ct$. Allora le componenti non nulle del tensore fondamentale sono

$$g_{11} = -e^{\lambda}, \quad g_{22} = -r^2, \quad g_{33} = -r^2 \operatorname{sen}^2\theta, \quad g_{44} = e^{\nu}.$$

Il determinante g diventa

$$g = -r^4 \operatorname{sen}^2 \theta\, e^{\lambda+\nu}$$

e quindi le componenti non nulle del coniugato del tensore fondamentale, simmetrico, sono

$$g^{11} = -e^{-\lambda}, \quad g^{22} = -\frac{1}{r^2}, \quad g^{33} = -\frac{1}{r^2 \operatorname{sen}^2 \theta}, \quad g^{44} = e^{-\nu}.$$

Un breve calcolo mostra che i soli simboli di Christoffel di seconda specie che non si annullano sono

$$\left\{\begin{aligned}
&\begin{Bmatrix} 1 \\ 11 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2}\lambda', \quad \begin{Bmatrix} 2 \\ 12 \end{Bmatrix} = \frac{1}{r}, \quad \begin{Bmatrix} 3 \\ 31 \end{Bmatrix} = \frac{1}{r}, \\
&\begin{Bmatrix} 1 \\ 22 \end{Bmatrix} = -re^{-\lambda}, \quad \begin{Bmatrix} 2 \\ 33 \end{Bmatrix} = -\operatorname{sen}\theta\cos\theta, \quad \begin{Bmatrix} 3 \\ 23 \end{Bmatrix} = \cot\theta, \\
&\begin{Bmatrix} 1 \\ 33 \end{Bmatrix} = -r\operatorname{sen}^2\theta\, e^{-\lambda}, \quad \begin{Bmatrix} 4 \\ 14 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2}\nu', \\
&\begin{Bmatrix} 1 \\ 44 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2}\nu' e^{-\lambda+\nu},
\end{aligned}\right. \tag{67.2}$$

dove l'apice sta a significare derivazione rispetto a r. Se ora calcoliamo le componenti del tensore di Ricci per mezzo di (33.2) otteniamo

$$\left\{\begin{aligned}
&R_{11} = -\frac{1}{r}\lambda' - \frac{1}{4}\lambda'\nu' + \frac{1}{2}\nu'' + \frac{1}{4}\nu'^2, \\
&R_{22} = \operatorname{cosec}^2\theta\, R_{33} = -1 + e^{-\lambda}\left\{1 - \frac{1}{2}r\lambda' + \frac{1}{2}r\nu'\right\}, \\
&R_{44} = e^{-\lambda+\nu}\left\{\frac{1}{4}\lambda'\nu' - \frac{1}{2}\nu'' - \frac{1}{r}\nu' - \frac{1}{4}\nu'^2\right\}, \\
&R_{\alpha\beta} = 0 \text{ per } \alpha \neq \beta.
\end{aligned}\right. \tag{67.3}$$

Un calcolo ulteriore ci dà l'invariante di curvatura

$$R = \frac{2}{r^2} + e^{-\lambda} \left\{ -\frac{2}{r^2} + \frac{2}{r}\lambda' + \frac{1}{2}\lambda'\nu' - \nu'' - \frac{2}{r}\nu' - \frac{1}{2}\nu'^2 \right\}. \tag{67.4}$$

Sostituendo questo in (66.2) otteniamo le componenti del tensore di Einstein per la metrica a simmetria sferica (67.1)

$$\left\{ \begin{aligned} G^1_{.1} &= -\frac{1}{r^2} + e^{-\lambda} \left\{ \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r}\nu' \right\}, \\ G^2_{.2} &= G^3_{.3} = e^{-\lambda} \left\{ -\frac{1}{2r}\lambda' - \frac{1}{4}\lambda'\nu' + \frac{1}{2}\nu'' + \frac{1}{2r}\nu' + \frac{1}{4}\nu'^2 \right\}. \\ G^4_{.4} &= -\frac{1}{r^2} + e^{-\lambda} \left\{ \frac{1}{r^2} - \frac{1}{r}\lambda' \right\}, \\ G^\alpha_{.\beta} &= 0 \text{ per } \alpha \neq \beta. \end{aligned} \right. \tag{67.5}$$

Esercizio. Trovare la condizione necessaria e sufficiente perché uno spazio con metrica a simmetria sferica sia uno spazio di Einstein.

68. Metrica di Schwarzschild. Andiamo ora alla ricerca della metrica a simmetria sferica (67.1) compatibile con l'esistenza di un punto materiale (cioè di una particella puntiforme gravitante) situato nell'origine e circondato da spazio vuoto. Escludendo l'origine stessa dalla nostra discussione, il tensore dell'energia-quantità di moto $T^\alpha_{.\beta}$ è nullo in tutti i punti. Segue dalla (66.3) che $G^\alpha_{.\beta} = 0$, e questo dà, in virtù delle (67.5), le seguenti equazioni

$$-\frac{1}{r^2} + e^{-\lambda} \left\{ \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r}\nu' \right\} = 0, \tag{68.1}$$

$$e^{-\lambda} \left\{ -\frac{1}{2r}\lambda' - \frac{1}{4}\lambda'\nu' + \frac{1}{2}\nu'' + \frac{1}{2r}\nu' + \frac{1}{4}\nu'^2 \right\} = 0, \tag{68.2}$$

$$-\frac{1}{r^2} + e^{-\lambda} \left\{ \frac{1}{r^2} - \frac{1}{r}\lambda' \right\} = 0. \tag{68.3}$$

Si trova subito che la soluzione della (68.3) è $e^{-\lambda} = 1 - 2m/(c^2r)$, dove la costante di integrazione m introdotta in questo modo può essere identificata fisicamente con la massa di riposo del punto materiale. Inoltre sottraendo la (68.3) dalla (68.1) otteniamo $e^{-\lambda}(\lambda' + \nu')/r = 0$. Di qui si ha $\lambda' + \nu' = 0$, e quindi $\lambda + \nu = k$, dove k è una costante. Così $e^{\nu} = e^{k}\{1 - 2m/(c^2r)\}$. Possiamo ora verificare che l'equazione (68.2) è identicamente soddisfatta. Comunque a grande distanza dal punto materiale la metrica dovrebbe approssimarsi alla metrica (64.6) della relatività ristretta. Perciò dobbiamo scegliere $k = 0$. Abbiamo così ottenuto la **metrica di Schwarzschild**

$$d\sigma^2 = -\left(1 - \frac{2m}{c^2r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \operatorname{sen}^2\theta \, d\psi^2 + \\ + c^2\left(1 - \frac{2m}{c^2r}\right) dt^2. \tag{68.4}$$

Esercizio. Dimostrare che uno spazio con una metrica di Schwarzschild è uno spazio di Einstein, ma non uno spazio a curvatura costante.

69. Moto dei pianeti. Ricerchiamo ora il moto di un pianeta nel campo gravitazionale del Sole. Consideriamo il Sole come un punto materiale e il pianeta come una particella libera la cui massa è piccola e non influenza la metrica: la sua linea di universo è allora una geodetica nello spazio V_4 con metrica di Schwarzschild (68.4). Le geodetiche sono determinate dalle quattro equazioni (26.4), in cui ora naturalmente sostituiamo s con σ. Converrà omettere una di queste equazioni, in pratica la più complessa che implica la $d^2r/d\sigma^2$, e sostituirla con la (27.1) che è del primo ordine ed è soddisfatta lungo le geodetiche. Fatto questo non avremo più bisogno dei simboli di Christoffel del tipo $\left\{ {1 \atop \alpha\beta} \right\}$. I rimanenti simboli di seconda specie non nulli si possono calcolare dalle (67.2) e si trovano per essi le seguenti espressioni:

$$\left\{ {2 \atop 12} \right\} = \frac{1}{r}, \quad \left\{ {3 \atop 13} \right\} = \frac{1}{r}, \quad \left\{ {4 \atop 14} \right\} = \frac{m}{c^2 r^2}\left(1 - \frac{2m}{c^2 r}\right)^{-1}.$$

$$\left\{ {2 \atop 33} \right\} = -\operatorname{sen}\theta\cos\theta, \quad \left\{ {3 \atop 23} \right\} = \cot\theta.$$

Da qui le quattro equazioni delle geodetiche risultano essere

$$\begin{aligned}
&\frac{d^2\theta}{d\sigma^2} + \frac{2}{r}\frac{dr}{d\sigma}\frac{d\theta}{d\sigma} - \operatorname{sen}\theta\cos\theta\left(\frac{d\psi}{d\sigma}\right)^2 = 0,\\
&\frac{d^2\psi}{d\sigma^2} + \frac{2}{r}\frac{dr}{d\sigma}\frac{d\psi}{d\sigma} + 2\cot\theta\,\frac{d\psi}{d\sigma}\frac{d\theta}{d\sigma} = 0,\\
&\frac{d^2 t}{d\sigma^2} + \frac{2m}{c^2 r^2}\left(1 - \frac{2m}{c^2 r}\right)^{-1}\frac{dr}{d\sigma}\frac{dt}{d\sigma} = 0, \qquad (69.1)\\
&-\left(1 - \frac{2m}{c^2 r}\right)^{-1}\left(\frac{dr}{d\sigma}\right)^2 - r^2\left(\frac{d\theta}{d\sigma}\right)^2 - r^2\operatorname{sen}^2\theta\left(\frac{d\psi}{d\sigma}\right)^2 +\\
&+ c^2\left(1 - \frac{2m}{c^2 r}\right)\left(\frac{dt}{d\sigma}\right)^2 = 1.
\end{aligned}$$

Assumiamo che inizialmente il pianeta si muova nel piano $\theta = \pi/2$. Cioè $d\theta/d\sigma$ e $\cos\theta$ sono inizialmente ambedue zero. Allora la (69.1) ci dice che anche $d^2\theta/d\sigma^2$ è nullo. Una ulteriore derivazione di questa equazione dimostra che $d^i\theta/d\sigma^i$ si annulla in corrispondenza a $t = 0$ per ogni i. Perciò si ha permanentemente $\theta = \pi/2$, e le precedenti equazioni si semplificano come segue

$$\frac{d^2\psi}{d\sigma^2} + \frac{2}{r}\frac{dr}{d\sigma}\frac{d\psi}{d\sigma} = 0, \qquad (69.2)$$

$$\frac{d^2 t}{d\sigma^2} + \frac{2m}{c^2 r}\left(1 - \frac{2m}{c^2 r}\right)^{-1}\frac{dr}{d\sigma}\frac{dt}{d\sigma} = 0, \qquad (69.3)$$

$$-\left(1 - \frac{2m}{c^2 r}\right)^{-1}\left(\frac{dr}{d\sigma}\right)^2 - r^2\left(\frac{d\psi}{d\sigma}\right)^2 + c^2\left(1 - \frac{2m}{c^2 r}\right)\left(\frac{dt}{d\sigma}\right)^2 = 1. \qquad (69.4)$$

Possiamo integrare immediatamente la (69.2) e la (69.3) ed otteniamo

$$r^2 \frac{d\psi}{d\sigma} = h, \quad \left(1 - \frac{2m}{c^2 r}\right) \frac{dt}{d\sigma} = k, \tag{69.5}$$

dove h e k sono costanti. Eliminando t e σ dalla (69.4) e dalle (69.5) otteniamo

$$-\frac{1}{r^4}\left(\frac{dr}{d\psi}\right)^2 - \frac{1}{r^2}\left(1 - \frac{2m}{c^2 r}\right) + \frac{c^2 k^2}{h^2} = \frac{1}{h^2}\left(1 - \frac{2m}{c^2 r}\right).$$

Eseguendo ora la sostituzione $r = 1/u$ e derivando l'equazione così ottenuta rispetto a ψ si ha

$$\frac{d^2 u}{d\psi^2} + u = \frac{u}{c^2 h^2} + \frac{3mu^2}{c^2}. \tag{69.6}$$

Per i pianeti del nostro sistema solare, il termine m/c^2h^2 è molto più grande di $3mu^2/c^2$. Ma quando trascuriamo quest'ultimo termine otteniamo l'equazione di Newton per il moto di un pianeta. Così la prima approssimazione della soluzione della (69.6) è la soluzione newtoniana $u = (m/c^2h^2)$ $\{1 + e \cos(\psi - \xi)\}$, dove e è l'eccentricità dell'orbita ellittica e ξ è la longitudine del perielio. Si può ottenere una seconda approssimazione della soluzione nella forma

$$u = \frac{m}{c^2 h^2}\{1 + e \cos(\psi - \xi - \Delta\xi)\}, \text{ dove } \Delta\xi = 3m^2\psi/c^4h^2.$$

Questo significa che l'asse maggiore dell'orbita ellittica ruota lentamente intorno al suo fuoco (il Sole). L'incremento di $\Delta\xi$ corrispondente alla rivoluzione completa $\psi = 2\pi$ è allora $6m^2\pi/c^4h^2$. Per il pianeta Mercurio si calcola di qui l'avanzamento del perielio in 42,9 secondi di grado per secolo. Questo si accorda bene con i valori osservati di 43,5 secondi per secolo.

70. Universo di Einstein. Einstein con considerazioni cosmologiche arrivò a considerare l'universo con la metrica seguente

$$d\sigma^2 = -(1-r^2/\mathcal{R}^2)^{-1}dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \operatorname{sen}^2\theta\, d\psi^2 + c^2 dt^2, \tag{70.1}$$

dove $\mathcal{R}$ è una costante. Questa metrica è a simmetria sferica con $\nu = 0$ e $e^{-\lambda} = (1 - r^2/\mathcal{R}^2)$. I simboli di Christoffel di seconda specie si ottengono facilmente dalle (67.2).

Cerchiamo il cammino di un raggio di luce nell'universo di Einstein. Il cammino deve essere una geodetica di lunghezza nulla, così le sue equazioni sono date da tre delle quattro equazioni (26.4) insieme con $g_{ij}dx^i/du\, dx^j/du = 0$. Cioè abbiamo

$$\begin{aligned}
&\frac{d^2\theta}{du^2} + \frac{2}{r}\frac{d\theta}{du}\frac{dr}{du} - \operatorname{sen}\theta\cos\theta\left(\frac{d\psi}{du}\right)^2 = 0,\\
&\frac{d^2\psi}{du^2} + \frac{2}{r}\frac{d\psi}{du}\frac{dr}{du} + 2\cot\theta\,\frac{d\psi}{du}\frac{d\theta}{du} = 0,\\
&\frac{d^2t}{du^2} = 0, \qquad\qquad (70.2)\\
&-(1-r^2/\mathcal{R}^2)^{-1}\left(\frac{dr}{du}\right)^2 - r^2\left(\frac{d\theta}{du}\right)^2 - r^2\operatorname{sen}^2\theta\left(\frac{d\psi}{du}\right)^2 +\\
&+ c^2\left(\frac{dt}{du}\right)^2 = 0,
\end{aligned}$$

dove u è un opportuno parametro. Seguendo lo stesso ragionamento del n. 69, si riconosce dalla (70.2) che è possibile assumere per θ il costante valore $\pi/2$. Con questa scelta le equazioni rimanenti si riducono alle seguenti

$$\frac{d^2\psi}{du^2} + \frac{2}{r}\frac{d\psi}{du}\frac{dr}{du} = 0, \quad \frac{d^2t}{du^2} = 0, \tag{70.3}$$

$$-(1-r^2/\mathcal{R}^2)^{-1}\left(\frac{dr}{du}\right)^2 - r^2\left(\frac{d\psi}{du}\right)^2 + c^2\left(\frac{dt}{du}\right)^2 = 0. \tag{70.4}$$

Integrando la (70.3) otteniamo

$$r^2 \frac{d\psi}{du} = h, \quad \frac{dt}{du} = k, \tag{70.5}$$

dove h e k sono costanti. Eliminate quindi t e u da queste equazioni e dalla (70.4) si ottiene

$$\left(\frac{dr}{d\psi}\right)^2 = r^2\left(1 - \frac{r^2}{\mathscr{R}^2}\right)\left(\frac{c^2k^2}{h^2} r^2 - 1\right).$$

La soluzione di questa equazione è

$$\frac{1}{r^2} = \frac{1}{\mathscr{R}^2} \cos^2(\psi - \xi) + \frac{c^2k^2}{h^2} \operatorname{sen}^2(\psi - \xi) \tag{70.6}$$

dove ξ è una costante. Si vede immediatamente che r riassume il suo valore iniziale quando ψ è incrementato di π e che r non è mai infinito per qualsiasi valore di ψ. Così tutte le geodetiche di lunghezza nulla, dell'universo di Einstein, cioè i raggi di luce, sono curve chiuse. Dalle (70.5) si vede che $dt/d\psi = (k/h)\, r^2$. Quindi il tempo impiegato da un raggio di luce a fare un giro completo è dato da

$$T = \frac{k}{h} \int_0^{2\pi} \left\{\frac{1}{\mathscr{R}^2} \cos^2(\psi - \xi) + \frac{c^2k^2}{h^2} \operatorname{sen}^2(\psi - \xi)\right\}^{-1} d\psi.$$

A causa della periodicità della ψ abbiamo

$$\begin{aligned} T &= \frac{k}{h} \int_0^{2\pi} \left\{\frac{1}{\mathscr{R}^2} \cos^2\psi + \frac{c^2k^2}{h^2} \operatorname{sen}^2\psi\right\}^{-1} d\psi \\ &= \frac{4k}{h} \int_0^{\pi/2} \left\{\frac{1}{\mathscr{R}^2} \cos^2\psi + \frac{c^2k^2}{h^2} \operatorname{sen}^2\psi\right\}^{-1} d\psi \end{aligned}$$

ed eseguendo l'integrazione si trova $T = 2\pi\mathscr{R}/c$.

Esercizio 1. Dimostrare che l'universo di Einstein non è uno spazio di Einstein·né uno spazio a curvatura costante.

Esercizio 2. Provare che l'invariante di curvatura dell'universo di Einstein è $R = 6/\mathscr{R}^2$.

71. Universo di De Sitter. Altre considerazioni cosmologiche hanno suggerito a De Sitter che l'universo potrebbe essere descritto dalla metrica

$$d\sigma^2 = -(1 - r^2/\mathscr{R}^2)^{-1}\, dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \operatorname{sen}^2\theta\, d\psi^2 + \\ + c^2(1 - r^2/\mathscr{R}^2)\, dt^2. \tag{71.1}$$

Anche questa metrica è a simmetria sferica, ma la costante $\mathscr{R}$ non ha lo stesso valore della corrispondente costante dell'universo di Einstein.

I cammini dei raggi di luce sono le geodetiche di lunghezza nulla date dalle equazioni

$$\frac{d^2\theta}{du^2} + \frac{2}{r}\frac{dr}{du}\frac{d\theta}{du} - \operatorname{sen}\theta\cos\theta\left(\frac{d\psi}{du}\right)^2 = 0,$$

$$\frac{d^2\psi}{du^2} + \frac{2}{r}\frac{dr}{du}\frac{d\psi}{du} + 2\cot\theta\frac{d\theta}{du}\frac{d\psi}{du} = 0, \tag{71.2}$$

$$\frac{d^2t}{du^2} - \frac{2r}{\mathscr{R}^2}(1 - r^2/\mathscr{R}^2)^{-1}\frac{dt}{du}\frac{dr}{du} = 0, \tag{71.3}$$

$$-(1 - r^2/\mathscr{R}^2)^{-1}\left(\frac{dr}{du}\right)^2 - r^2\left(\frac{d\theta}{du}\right)^2 - r^2\operatorname{sen}^2\theta\left(\frac{d\psi}{du}\right)^2 + \\ + c^2(1 - r^2/\mathscr{R}^2)\left(\frac{dt}{du}\right)^2 = 0. \tag{71.4}$$

Di nuovo possiamo scegliere $\theta = \pi/2$, e con una integrazione le equazioni (71.2) e (71.3) divengono

$$r^2\frac{d\psi}{du} = h, \quad \frac{dt}{du} = k(1 - r^2/\mathscr{R}^2)^{-1}.$$

Eliminiamo t e u tra queste equazioni e la (71.4); otteniamo allora

$$(dr/d\psi)^2 = r^2(a^2r^2 - 1),$$

dove $a^2 = c^2k^2/h^2 + 1/\mathscr{R}^2$. Questa equazione può essere integrata immediatamente e dà

$$1/r = a \cos(\psi - \xi), \tag{71.5}$$

dove ξ è una costante. Queste traiettorie corrispondono a linee rette, esse certamente non sono chiuse, poiché r diviene infinito quando $\psi - \xi = \pi/2$.

Esercizio. Dimostrare che l'universo di De Sitter è uno spazio di Einstein con curvatura costante $12/\mathscr{R}^2$.

Soluzione dell'es. proposto al n. 67

$e^{-\lambda} = 1 + ar^2 + b/r$; $\nu = k - \lambda$, dove a, b e k sono costanti.

NOTA BIBLIOGRAFICA

Teoria dei tensori

Schouten J. A. — *Der Ricci-Kalkül* (Berlin, 1924).
Levi Civita T. — *Lezioni di calcolo differenziale assoluto* (Roma, 1925).
Appel P. — *Traité de Mécanique rationnelle*, t.v. (Paris, 1926).
Eisenhart L. P. — *Riemannian Geometry* (Princeton, 1926).
Levi-Civita T. — *The absolute differential calculus* (London-Glasgow, 1927).
Veblen O. — *Invariants of quadratic differential forms* (Cambridge, 1927).
Cisotti U. — *Calcolo tensoriale* (Milano, 1928).
Burali-Forti C., Marcolongo R. — *Analisi vettoriale generale:* I. *Trasformazioni lineari* (Bologna, 1929).
Jeffreys H. — *Cartesian tensors* (Cambridge, 1931).
McConnell A. J. — *Applications of the absolute differential calculus* (1931).
Schouten J. A., struik D. J. — *Einführung in die neueren Methoden der Differentialgeometrie* [Vol. 1 (1935), Vol. 2 (1938)].
Weatherburn C. E. — *An introduction to Riemannian Geometry and the tensor calculus* (Cambridge, 1942).
Bureau F. — *Calcul vectoriel et calcul tensoriel* (Liège, 1945).
Michal A. D. — *Matrix and tensor calculus* (1947).
Brand L. — *Vector and tensor calculus* (1947).
Finzi B., Pastori M. — *Calcolo tensoriale e applicazioni* (Bologna, 1949).
Synge J. L., Schild A. — *Tensor calculus* (1949).

SCHOUTEN J. A. — *Tensor calculus for physicists* (1951).
SCHOUTEN J. A. — *Ricci calculus* (1954).

Un elenco dettagliato delle memorie originali sulla teoria dei tensori è contenuto nel vol. 2° del libro di J. A. SCHOUTEN e D.J. STRUIK e nel testo di SCHOUTEN, *Ricci calculus*.

GEOMETRIA DIFFERENZIALE

BIANCHI L. — *Lezioni di Geometria differenziale* (Bologna, 1927).
BLASCHKE W. — *Vorlesungen über Differentialgeometrie* [Berlin, Vol. 1, 2ª ed. (1924), Vol. 2 (1923), Vol. 3 (1929)].
BURALI - FORTI C., MARCOLONGO R. — *Analisi vettoriale generale:* I. Trasformazioni lineari (Bologna, 1929).
BURGATTI P., BOGGIO T., BURALI - FORTI C. — *Analisi vettoriale generale:* II. Geometria differenziale (Bologna, 1930).
WEATHERBURN C. E. — *Differential Geometry of 3 dimensions* [Vol. 1 (1927), Vol. 2 (1930)].
EISENHART L. P. — *An introduction to differential Geometry with use of the tensor calculus* (New York, 1946).

ELASTICITÀ

CESARO E. — *Introduzione alla teoria matematica dell'elasticità* (Torino, 1894).
MARCOLONGO R. — *Teoria matematica dell'equilibrio dei corpi elastici* (Milano, 1904).
LOVE A. E. H. — *A treatise on the mathematical theory of Elasticity* [Cambridge, 4ª ed. (1927)].
TIMOSHENKO S. — *Theory of Elasticity* (New York-London, 1934).
SOKOLNIKOFF I. S. — *Mathematical theory of Elasticity* (1946).
BRILLOUIN L. — *Les tenseurs en Mécanique et en Élasticité* (Paris, 1946).

RELATIVITÀ

WEYL H. — *Space, time, matter* (1922).
EINSTEIN A. — *The principle of Relativity* (1923).
EDDINGTON A. S. — *The mathematical theory of Relativity* (Cambridge, 1923).
LEVI-CIVITA T. — *Fondamenti di meccanica relativistica* (Bologna, 1928).
BERGMANN P. G. — *Introduction to the theory of Relativity* (Prentice-Hall, 1942).
TOLMAN R. C. — *Relativity, Thermodynamics and Cosmology* (Oxford, 1946).
EINSTEIN A. — *Il significato della relatività* (trad. ital., Torino, 1950).
PAULI W. — *La teoria della relatività* (trad. ital., Torino 1958).

Potranno pure essere di utile consultazione i seguenti voll. della Collana degli « University Mathematical Texts » edita da *Oliver* e *Boyd*, cui appartiene l'originale inglese del presente volume:

AITKEN A. C. — *Determinants and Matrices* (trad. ital. in « Poliedro »).
COULSON C. A. — *Waves* (trad. ital. in « Poliedro »).
GILLESPIE R. P. — *Partial Differentiation.*
LEDERMANN W. — *Introduction to the theory of finite groups* (trad. ital. in « Poliedro »).
McCREA W. H. — *Analytical Geometry of three dimensions.*
RINDLER W. — *Special Relativity* (trad. ital. in « Poliedro »).
RUTHERFORD D. E. — *Vector Methods.*

INDICE ANALITICO

INDICE

CAPITOLO I

ALGEBRA TENSORIALE

CAPITOLO II

L'ELEMENTO LINEARE

CAPITOLO III

DERIVAZIONE COVARIANTE

CAPITOLO IV

GEODETICHE - PARALLELISMO

CAPITOLO V

TENSORE DI CURVATURA

CAPITOLO VI

GEOMETRIA DIFFERENZIALE
TRIDIMENSIONALE EUCLIDEA

CAPITOLO VII

TENSORI CARTESIANI - ELASTICITÀ

Capitolo VIII

TEORIA DELLA RELATIVITÀ

Finito di stampare nel settembre 1971
S.T.E. - Stabilimento Tipografico Editoriale
Città di Castello